1. Introducción

Problema 1.1. *Deriva las ecuaciones de Hamilton de la propia definición*

$$H(x,p) = p\dot{x} - L(x,\dot{x}).$$

Resolución. Derivamos el hamiltoniano con respecto a la posición

$$\partial_x H = -\partial_x L, \tag{1}$$

la derivada del lagrangiano la obtenemos de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \tag{2}$$

como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p,$$

tenemos que

$$\partial_x L = -\dot{p}.$$

Como en el hamiltoniano solo el primer sumando depende explícitamente del momento, su derivada respecto al momento es simplemente

$$\partial_p H = \dot{x}.$$

Problema 1.2. *Usando la ecuación de Schrödinger*

$$\left\{-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\boldsymbol{x})\right\}\Psi(\boldsymbol{x},t) = i\hbar\partial_t\Psi(\boldsymbol{x},t)$$

muestra que la densidad de probabilidad $\rho = \Psi^*\Psi$ satisface la ecuación de continuidad

$$\partial_t\rho + d\boldsymbol{j} = 0,$$

donde

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2im}\left\{\Psi^*\nabla\Psi - (\nabla\Psi^*)\,\Psi\right\}.$$

Resolución. Aplicamos la derivada temporal a la densidad de probabilidad

$$\partial_t\rho = \partial_t(\Psi^*\Psi) = (\partial_t\Psi^*)\Psi + \Psi^*(\partial_t\Psi)$$

sustituimos la evolución temporal de la función de onda dada por la ecuación de Schrödinger

$$\begin{gathered} i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi \ , \ -i\hbar\partial_t\Psi^* = \hat{H}\Psi^* \\ \partial_t\rho = \left(-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}\Psi^*\right)\Psi + \Psi^*\left(\frac{1}{i\hbar}\hat{H}\Psi\right) \end{gathered} \tag{3}$$

desarrollamos el operador hamiltoniano del enunciado

$$\begin{aligned} \partial_t\rho =& \left(\frac{\hbar}{2im}\nabla^2\Psi^* - V(\mathbf{x})\Psi^*\right)\Psi + \Psi^*\left(-\frac{\hbar}{2im}\nabla^2\Psi + V(\mathbf{x})\Psi\right) \\ =& \left(\frac{\hbar}{2im}\nabla^2\Psi^*\right)\Psi + \Psi^*\left(-\frac{\hbar}{2im}\nabla^2\Psi\right) \\ =& \frac{\hbar}{2im}\left(\nabla\nabla\Psi^*\Psi - \nabla\nabla\Psi\Psi^*\right) = \frac{\hbar}{2im}\nabla\left(\nabla\Psi^*\Psi - \nabla\Psi\Psi^*\right) \\ =& \nabla\left[\frac{\hbar}{2im}\left(\nabla\Psi^*\Psi - \nabla\Psi\Psi^*\right)\right] = \nabla\cdot\mathbf{j} \end{aligned}$$

en el tercer paso se anulan entre si los términos $\nabla\Psi\nabla\Psi^*$ obtenidos al sacar fuera del paréntesis el operador divergencia.

Problema 1.3. *Demuestra que si $|\psi\rangle$ tiene estados propios simultáneos de dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$, implica que ambos operadores conmutan.*

Resolución. La actuación de cada operador sobre el mismo estado propio simultáneo viene dado por

$$\begin{aligned} \hat{A}\,|\psi\rangle = a\,|\psi\rangle \ , \ \hat{B}\,|\psi\rangle &= b\,|\psi\rangle \\ \hat{A}\hat{B}\,|\psi\rangle = \hat{A}b\,|\psi\rangle &= ab\,|\psi\rangle \\ \hat{B}\hat{A}\,|\psi\rangle = \hat{B}a\,|\psi\rangle &= ba\,|\psi\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

como los autovalores a y b son reales implica que el conmutador de ambos operadores se anulan.

Problema 1.4. *A partir de la definición de un operador de Heisenberg*

$$\hat{O}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\ \hat{O}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$$

deriva la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$i\hbar\frac{d\hat{O}}{dt} = \left[\hat{O}_H, \hat{H}\right].$$

Resolución. Derivamos el operador de Heisenmberg con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \partial_t\hat{O}_H = &\left(\partial_t e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\right)\hat{O}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\ \partial_t\hat{O}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\ \hat{O}\ \left(\partial_t e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

simplificamos

$$\begin{aligned} \partial_t\hat{O}_H = \frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{O}_H - \frac{i}{\hbar}\hat{O}_H\hat{H} &= \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{O}_H\right] \\ i\hbar\partial_t\hat{O}_H &= \left[\hat{O}_H, \hat{H}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

ya que el operador de Schrödinger es independiente del tiempo, $\partial_t\hat{O} = 0$.

Problema 1.5. *Considera la ecuación de Heisenberg de movimiento para el operador momento $\hat{p}$ del oscilador armónico con el hamiltoniano*

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}^2}{m} + m\omega^2\hat{x}^2\right),$$

para mostrar que es equivalente a la ley de Newton para el operador posición $\hat{x}$.

Resolución. La ecuación de Heisenmberg del movimiento para el operador momento es

$$\partial_t\hat{p}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{p}_H\right] \tag{7}$$

siendo el operador momento en la imagen de Heisenmberg

$$\begin{aligned} \hat{p}_H(t-t_0) =& e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\ \hat{p}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \\ =& e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\ \frac{\hbar}{i}\partial_x\ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \\ =& e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\ \frac{\hbar}{i}\left(\frac{-i}{\hbar}m\omega^2\hat{x}(t-t_0)\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \\ =& -m\omega^2(t-t_0)\hat{x}_H \end{aligned} \tag{8}$$

donde vemos que la variación con el tiempo del operador momento coincide con la fuerza recuperadora del oscilador

$$\frac{\hat{p}_H(t-t_0)}{t-t_0} = \dot{\hat{p}}_H = -m\omega^2 \hat{x}_H$$

2. Teoría clásica de campos

Problema 2.1. *Dado el invariante relativista de la medida de* d^4k*, demuestra que la medida de integración* d^3k

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{k})}$$

es invariante de Lorentz, siempre que $E(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$*. (Pista: comienza con la expresión invariante de Lorentz*

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2-m^2)\theta(k_0)$$

y usa

$$\delta(x^2-x_0^2) = \frac{1}{|x|}(\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0))$$

¿Cual es el significado de las funciones δ *y* θ *anteriores? También puedes comprobar la relación* $\delta(x^2-x_0^2)$*)*

Resolución. Desglosamos el tetravector momento en sus componentes $k \equiv (k_0, \vec{k})$

$$\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2-m^2)\theta(k_0) = \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \mathrm{d}k_0\ \delta(k_0^2-m^2)\ \theta(k_0) \tag{9}$$

usamos la relación

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

donde x_i son las raíces de la función g

$$\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \mathrm{d}k_0\ \frac{\delta(k_0-m)+\delta(k_0+m)}{2k_0}\ \theta(k_0) \tag{10}$$

si identificamos $\theta(k_0)$ con e^{-ik_0x} tenemos la transformada de Fourier de la función unidad integrada entre $+\infty$ y $-\infty$

$$\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\ [\delta(k_0-m)+\delta(k_0+m)]\ e^{-ik_0x} \tag{11}$$

además la componente k_0 está relacionada con la energía función del momento $E(\mathbf{k})$

$$\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2-m^2)\theta(k_0) = \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{k})} \tag{12}$$

Las funciones $\delta(k_0-m)$ y $\delta(k_0+m)$ están relacionadas con la materia con energía positiva y la antimateria con energía negativa.

Problema 2.2. *Verifica que*

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\ 2\ E(\boldsymbol{k})} \left\{e^{ikx}a(\boldsymbol{k}) + e^{-ikx}b(\boldsymbol{k})\right\}$$

es una solución de la ecuación de Klein-Gordon. Muestra que un campo escalar real $\phi^*(x) = \phi(x)$ *requiere la condición* $b(\boldsymbol{k}) = a^*(\boldsymbol{k})$

Resolución. La ecuación de Klein-Gordon es

$$(\Box + m^2)\ \phi(x) = 0$$

cuya solución es satisfecha por

$$\phi(x) \propto e^{i(k^0 t - \mathbf{kx})}$$

ya que se obtiene $(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$, relacionada con la expresión relativista de la energía

$$E(\mathbf{k}) = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

por lo que también es solución

$$\phi(x) \propto e^{-i(k^0 t - \mathbf{kx})}$$

El tetravector energía-momento $k \equiv (k^0, \mathbf{k})$ y el de posición $x \equiv (t, \mathbf{x})$ y su producto escalar lo representamos por

$$k \cdot x = k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = E(\mathbf{k})\ t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$$

y extendemos la solución a todos los valores posibles del momento usando una serie de Fourier con coeficientes complejos y que cumplan la relación de energía

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\ \delta\left((k^0)^2 - (\mathbf{k}^2 + m^2)\right)\left\{e^{ikx} a(\mathbf{k}) + e^{-ikx} b(\mathbf{k})\right\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3\ 2k^0}\ \frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi} \delta\left((k^0)^2 - (\mathbf{k}^2 + m^2)\right)\left\{e^{ikx} a(\mathbf{k}) + e^{-ikx} b(\mathbf{k})\right\} \qquad (13) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3\ 2E(\mathbf{k})}\ \left\{e^{ikx} a(\mathbf{k}) + e^{-ikx} b(\mathbf{k})\right\}
\end{aligned}$$

Escribimos el conjugado del campo, teniendo en cuenta que la energía tiene un valor real

$$\phi^*(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3\ 2E(\mathbf{k})}\ \left\{e^{-ikx} a^*(\mathbf{k}) + e^{ikx} b^*(\mathbf{k})\right\}$$

si el campo es un escalar real debe cumplirse que

$$e^{ikx} a(\mathbf{k}) + e^{-ikx} b(\mathbf{k}) = e^{-ikx} a^*(\mathbf{k}) + e^{ikx} b^*(\mathbf{k})$$

y solo es posible si $a(\mathbf{k}) = b^*(\mathbf{k})$.

Problema 2.3. *Demuestra que la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ para un campo escalar es*

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left\{(\partial_0\phi)^2 + (d\phi)^2 + m^2\phi^2\right\}$$

Deriva las componentes $\hat{P}_0$ y $\hat{\boldsymbol{P}}$ del tetravector energía-momento $\hat{P}^\mu$ en términos de operadores de campo $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$.

Resolución. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para una teoría de campo clásica son

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} = 0$$

si el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\ \partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} &= -\,m^2\phi \\ \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} &= \partial^\mu\partial_\mu\phi = (\partial^0\partial_0 - \partial^x\partial_x)\phi = (\partial^0\partial_0 - \nabla^2)\phi = \Box\phi\end{aligned} \tag{14}$$

obteniendo la ecuación de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

Mantenemos la analogía con la mecánica del punto y relacionamos el momento generalizado con la derivada del lagrangiano con respecto al cambio del campo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)}{\partial\dot{\phi}(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)}{\partial(\partial_0\phi(x))} = \partial_0\phi(x))$$

y como el hamiltoniano $\mathcal{H}(\phi,\pi)$ por la transformada de Legendre está relacionado con el lagrangiano $\mathcal{L}(\phi,\partial^\mu\phi)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\phi,\pi) &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \pi^2 - \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\;\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \pi^2 - \frac{1}{2}\partial^0\phi\;\partial_0\phi + (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\{\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

El tensor energía-momento se define como

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu\phi)}\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

analizamos las componentes

$$\begin{aligned}\Theta_{00} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^0\phi)}\partial_0\phi - g_{00}\mathcal{L} = \pi^2 - \mathcal{L} = \mathcal{H} \\ \Theta_{0j} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^0\phi)}\partial_j\phi - g_{0j}\mathcal{L} \overset{g_{0j}=0}{=} \pi - \partial_j\phi \\ \Theta_{ij} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^i\phi)}\partial_j\phi - g_{ij}\mathcal{L} = \partial_i\phi\;\partial_j\phi + \frac{1}{2}\partial_i\phi\;\partial_i\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\end{aligned} \tag{16}$$

las dos primeras expresiones se identifican con la conservación de la energía y del momento en tres dimensiones, por lo que el tetravector momento toma la forma

$$P_\mu = \Theta_{0\mu} \equiv (\Theta_{00}, \Theta_{0j})$$

3. Teoría cuántica de campos

Problema 3.1. *Usando las expresiones para $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ en términos de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ muestra que para tiempos diferentes el conmutador*

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')\right] = \frac{i}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')}\right)$$

En cambio si $t = t'$ se recupera el conmutador

$$\left[\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t), \hat{\pi}(\boldsymbol{x}',t)\right] = i\;\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

Resolución. Escribimos los operadores campo y su derivada temporal

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} \left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\\ \hat{\pi}(x') &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2} i \left(e^{ipx'}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{-ipx'}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\end{aligned} \tag{17}$$

multiplicamos los términos de la serie de Fourier (el contenido entre paréntesis) del operador campo por los del momento generalizado y les restamos el producto de los del momento por los del campo y obtenemos

$$\begin{aligned}&\left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right)) \cdot \left(e^{ipx'}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{-ipx'}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\\ &- \left(e^{ipx'}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{-ipx'}\hat{a}(\mathbf{p})\right) \cdot \left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\\ &= \left(e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')}\right)\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]\end{aligned} \tag{18}$$

El conmutador de los operadores de creación y aniquilación es

$$\left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\right] = (2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p}) \tag{19}$$

LLevamos estos resultados parciales al conmutador de los operadores campo y momento

$$\begin{aligned}\left[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')\right] = &\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2}\\ &\left(e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')}\right)(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p})\end{aligned} \tag{20}$$

dado que

$$\int \mathrm{d}^3p \left(e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')}\right)\delta^3(\mathbf{p}) = e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')} \tag{21}$$

nos queda

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')\right] = \frac{i}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')}\right) \tag{22}$$

Si $x \equiv (t, \mathbf{x})$ y $x' \equiv (t', \mathbf{x}')$ no se puede simplificar la anterior expresión, pero si $t = t'$

$$\begin{aligned}\left[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')\right] =& \frac{i}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(e^{ip(t-t')}e^{ip(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\right.\\ &\left.+e^{-ip(t-t')}e^{-ip(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\right) = \frac{i}{2}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\end{aligned} \tag{23}$$

puesto que

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\ e^{ip(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\\ \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\end{aligned} \tag{24}$$

Problema 3.2. *Siendo operadores de Heisenberg dependientes del tiempo, los operadores* $\hat{O} = \hat{\phi}(\boldsymbol{x}, t)$, $\pi(\hat{\boldsymbol{x}}, t)$ *de la teoría de camapo escalar obedecen la ecuación de Heisenberg*

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O} = \left[\hat{O}, \hat{H}\right]$$

En analogía a lo hecho en el problema 1.5, demuestra la equivalencia de esta ecuación con la de Klein-Gordon.

Resolución. Empezamos por el operador campo y comprobamos cada uno de los miembros de la ecuación de Hesienberg

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O} =& i\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\left(e^{i(Et-\mathbf{px})}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-i(Et-\mathbf{px})}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\\ =& i\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} iE(\mathbf{p})\left(e^{i(Et-\mathbf{px})}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{-i(Et-\mathbf{px})}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\\ =& -\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2}\left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{-ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right) \end{aligned} \tag{25}$$

seguimos con el conmutador

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi},\hat{H}\right] =& \left[\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{-ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\right.\\ &\left., \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}E(\mathbf{p})\left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) - \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\right)\right]\\ =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\frac{E(\mathbf{p})}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\left\{\left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}),\hat{a}(\mathbf{p})\right]\right.\\ &\left. + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}),\hat{a}(\mathbf{p})\right]\left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\right\} = -\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2}\left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{-ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right) \end{aligned} \tag{26}$$

donde se ha considerado lo siguiente

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}),\hat{a}(\mathbf{p})\right] &= -(2\pi)^3 2\ E(\mathbf{p})\ \delta^3(\mathbf{p})\\ \int \mathrm{d}^3p\ \left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\ \delta^3(\mathbf{p}) &= e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{ipx}\hat{a}(\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{27}$$

Problema 3.3. *Expresa el hamiltoniano*

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\ \{(\partial_0\hat{\phi})^2 + (\nabla\hat{\phi})^2 + m^2\hat{\phi}^2\}$$

de la teoría del campo escalar libre cuantizado en términos de operadores de creación y aniquilación y muestre que está dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\boldsymbol{p})}E(\boldsymbol{p})\left\{\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\ \hat{a}(\boldsymbol{p}) + \hat{a}(\boldsymbol{p})\ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right\}$$

Resolución. Calculamos cada uno de los sumandos que contiene el operador hamiltoniano

$$\begin{aligned} \partial_t\ \hat{\phi}(x) =& \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\ iE(\mathbf{p})\ \left(e^{ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - e^{-ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\right)\\ (\partial_0\hat{\phi})^2 =& \partial_t\ \hat{\phi}(x)\ \partial^t\ \hat{\phi}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\\ &\cdot(-E(\mathbf{p})^2)\left(e^{2ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-2ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})\right.\\ &\left.-\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) - \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\right) \end{aligned} \tag{28}$$

el cuadrado del gradiente es $(\nabla\hat{\phi})^2 = -\partial_{\mathbf{x}}\hat{\phi}\ \partial^{\mathbf{x}}\hat{\phi}$ con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}(\nabla\hat{\phi})^2 = -\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} \\ \cdot (-\mathbf{p}^2) \Big(e^{2ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-2ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) \\ -\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) - \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big)\end{aligned} \tag{29}$$

y el tercer sumando queda

$$\begin{aligned}m^2\hat{\phi}^2 = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} \\ \cdot m^2 \Big(e^{2ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-2ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) \\ +\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big)\end{aligned} \tag{30}$$

Vamos a ir colocando y simplificando el operador hamiltoniano sin operadores de creación y aniquiliación

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\frac{1}{2\ E(\mathbf{p})} \tag{31}$$

donde hemos aplicado la relación de De Broglie donde la longitud de onda está relacionado con la inversa del momento si tenemos en cuenta que $\hbar = 1$. Este factor multiplica a otro que contiene dos sumandos, el primero es

$$(-E(\mathbf{p})^2 + \mathbf{p}^2 + m^2)\Big(e^{2ipx}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-2ipx}\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})\Big) = 0 \tag{32}$$

donde se cumple la relación relativista $E^2 = p^2 + m^2$. El segundo sumando es

$$(E(\mathbf{p})^2 - \mathbf{p}^2 + m^2)\Big(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big) = 2E(\mathbf{p})^2\Big(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big) \tag{33}$$

al multiplicar ambos factores obtenemos el operador hamiltoniano expresado en función de los operadores de creación y aniquilación del enunciado.

Problema 3.4. *Prueba la relación de conmutación*

$$\Big[: \hat{P}^\mu :, \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k})\Big] = k^\mu\ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k})$$

para demostrar que

$$: \hat{P}^\mu :\ \ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k}_1)\,|0\rangle = (k_1^\mu + k_2^\mu)\,\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{k}_1)\,|0\rangle$$

Interpreta el significado físico del resultado.

Resolución. Escribimos las componentes del operador momento ordenado

$$: \hat{P}^\mu := \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{k})}\ k^\mu\ 2\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}(\mathbf{k}) \tag{34}$$

aplicamos el conmutador con el operador creación

$$\begin{aligned}\Big[: \hat{P}^\mu :, \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\Big] &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{k})}\ k^\mu\ \Big(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}(\mathbf{k})\Big) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{k})}\ k^\mu\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \Big[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\Big] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{k})}\ k^\mu\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ (2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{k})\ \delta^3(\mathbf{k}) = k^\mu\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{35}$$

De este conmutador obtenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} :\hat{P}^\mu:\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\left|0\right\rangle =& \left\{\left[:\hat{P}^\mu:, \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\right] + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\ :\hat{P}^\mu:\right\} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\left|0\right\rangle \\ =& k_2^\mu\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\left|0\right\rangle + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\ :\hat{P}^\mu:\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\left|0\right\rangle \\ =& k_2^\mu\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\left|0\right\rangle + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\ \left\{\left[:\hat{P}^\mu:, \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\right] + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\ :\hat{P}^\mu:\right\}\left|0\right\rangle \\ =& k_2^\mu\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\left|0\right\rangle + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\ k_1^\mu\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\left|0\right\rangle \\ &+ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\ :\hat{P}^\mu:\left|0\right\rangle = (k_2^\mu + k_1^\mu)\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\left|0\right\rangle \end{aligned} \tag{36}$$

donde $:\hat{P}^\mu:\left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle$ y el resultado que se obtiene es que el momento del estado de dos partículas es la suma de cada una de sus componentes.

Problema 3.5. *Prueba por inducción que*

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\boldsymbol{p})}\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\ \hat{a}(\boldsymbol{p})\left|\boldsymbol{k},...,\boldsymbol{k}\right\rangle = n\ \ \left|\boldsymbol{k},...,\boldsymbol{k}\right\rangle$$

Pista: procede la inducción en dos pasos, i) muestra que el enunciado es cierto para algún valor inicial de n, ii) muestre que si el enunciado mantiene para un general n, entonces se mantiene par n + 1.

Resolución. El estado del sistema viene indicado por el ket que contiene n partículas con el mismo momento, consideraremos que el estado se compone de dos partículas

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \left|0\right\rangle = \left|\mathbf{k},\mathbf{k}\right\rangle \tag{37}$$

que sustituimos en la ecuación de prueba

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\ \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \left|0\right\rangle \tag{38}$$

el producto entre el segundo y tercer operador lo relacionamos con el conmutador de los operadores creación y aniquilación

$$\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) = \left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\right] + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}(\mathbf{p}) \tag{39}$$

que multiplicamos con el cuarto operador

$$\begin{aligned} \hat{a}(\mathbf{p})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) =& \left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\right]\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}(\mathbf{p})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \\ =& \left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\right]\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\right] + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}(\mathbf{p}) \\ =& 2\ \left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\right]\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}(\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{40}$$

añadimos el operador que es el primer factor del producto

$$2\ \left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\right]\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}(\mathbf{p}) \tag{41}$$

el segundo sumando se desvanece porque $\hat{a}(\mathbf{p})\left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle$ y el conmutador es

$$\left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\right] = (2\pi)^3\ E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \tag{42}$$

siendo el resultado final

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\ 2\ E(\mathbf{p})} 2\ (2\pi)^3\ E(\mathbf{p})\ \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \left|0\right\rangle \\ &= 2\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\ \left|0\right\rangle = 2\ \left|\mathbf{k},\mathbf{k}\right\rangle \end{aligned} \tag{43}$$