- En mecánica cuántica el estado de un sistema físico es un vector perteneciente a un espacio vectorial complejo. Los observables son operadores lineales, hermíticos, que operan sobre el espacio vectorial complejo.

- Un funcional lineal en un espacio vectorial V es una aplicación de V a F (escalares del campo, bien $\mathcal{R}$ o $\mathcal{C}$) , un funcional lineal es un elemento de un espacio vectorial llamado dual V'.

- Un operador es una aplicación en un espacio vectorial a si mismo. Los vectores propios de un operador son linealmente independientes y forman una base del espacio.

- Si la lista de vectores $\nu_1, \ldots, \nu_n$ forman una base de V, su base dual es $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ en V' es un funcional lineal en V tal que

$$\varphi_j(\nu_k) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases} \tag{1}$$

- El producto interno es una generalización del producto escalar aplicado a reales para abarcar los complejos, es una función que toma cada par de elementos de $(u, v) \in V$ y los transforma en un número $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i^* v_i \in F$.

- Si ϕ es un funcional lineal en Vhay un vector único $u \in V$ tal que $\phi(v) = \langle u, v \rangle$ para cualquier $v \in V$. Si consideramos la base ortonormal en V $\{e_i\}$ podemos escribir el vector v como $v = \langle e_1, v \rangle e_1 + \cdots + \langle e_n, v \rangle e_n$, y al actuar el funcional ϕ sobre el mismo obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(v) &= \langle e_1, v \rangle \phi(e_1) + \cdots + \langle e_n, v \rangle \phi(e_n) \\ &= \langle \phi(e_1)^* e_1, v \rangle e_1 + \cdots + \langle \phi(e_n)^* e_n, v \rangle e_n \\ &= \langle \phi(e_1)^* e_1 + \cdots + \phi(e_n)^* e_n, v \rangle \end{aligned} \tag{2}$$

donde $u = \phi(e_1)^* e_1 + \cdots + \phi(e_n)^* e_n$.

- Dirac introdujo una notación alternativa útil para el producto interno $\langle u, v \rangle \to \langle u|v \rangle$. Consideramos dos vectores de V (a, b) que podemos visualizar como matrices columna con un número de elementos igual a la dimensión del espacio vectorial

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

su producto interno en forma matricial debe responder a

$$\langle a|b \rangle = a_1^* b_1 + \cdots + a_n^* b_n = \begin{pmatrix} a_1^* & \ldots & a_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

de donde deducimos que $\langle a|$ es un funcional lineal que actúa sobre el vector b, y por tanto un vector dual de a que pertenece al espacio dual V' . Si seguimos considerando que $\nu_1, \ldots, \nu_n$ es una base de V y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ su base dual en V'

$$\langle a| = a_i^* \langle \varphi_i| \qquad |b\rangle = b_j |\nu_j\rangle \qquad \langle a|b\rangle = a_i^* b_j \langle \varphi_i|\nu_j\rangle = a_i^* b_j \delta_{ij}$$

donde $\varphi_i(\nu_j) \equiv \langle \varphi_i|\nu_j\rangle$.

- El espectro de energía del oscilador armónico simple responde a la ecuación $\hat{H} |E_i\rangle = E_i |E_i\rangle$ donde $|E_i\rangle$son los estados propios correspondiente a cada nivel de energía, son linealmente independientes y forman una base numerable del espacio vectorial de los estados de energía del oscilador. En general podemos simplificar la notación cuando la base es numerable

$$\langle E_i| = \langle i| \qquad |E_j\rangle = |j\rangle \qquad \langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

la base abarca todo el espacio vectorial V y cada vector viene expresado por una combinación lineal de la base

$$|E\rangle = \sum_i E_i |i\rangle \qquad E_i = \langle i|E\rangle \qquad |E\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|E\rangle$$

la segunda expresión indica que la componente i del vector es su proyección sobre el vector i de la base, y en la tercera aparece el operador proyección en dicha dirección

$$P_i = |i\rangle \langle i| \qquad \mathbf{1} = \sum_i |i\rangle \langle i| \tag{3}$$

donde $\mathbf{1}$ es el operador identidad. El producto interior de los estados $|B\rangle$ y $|A\rangle$es

$$\langle A|B\rangle = \langle A|\mathbf{1}B\rangle = \sum_i \langle A\,|i\,\rangle\langle\, i|\,B\rangle = \sum_i \langle i\,|A\,\rangle^*\langle\, i|\,B\rangle = \sum_i A_i^* B_i \tag{4}$$

- En el espacio vectorial complejo de funciones complejas $f(x) \in C$ cuya variable x es continua la base no es numerable. En el caso del espacio vectorial complejo de los estados de posición, simplificamos la notación de los vectores de la base que cumplen $\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle$

$$\mathbf{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, |x\rangle \langle x| \quad \mathbf{1}\, |y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, |x\rangle \langle x|y\rangle \quad \langle x|y\rangle = \delta(x-y) \tag{5}$$

donde $\delta(x-y)$ es la delta de Dirac

$$\delta(x-y) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases} \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; \delta(x-y) = 1 \tag{7}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(x-y) \tag{8}$$

De la proyección de un vector $|f\rangle$ en en la dirección $|x\rangle$ dada por $f(x) = \langle x|f\rangle$ deducimos el solapamiento con otro vector $|g\rangle$

$$\begin{aligned} \langle f|g\rangle = \langle f|\mathbf{1}g\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \langle f\,|x\rangle \, \langle x|\, g\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \langle x\,|f\rangle^* \, \langle x|\, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{9}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son las funciones de onda asociadas al estado de posición de los vectores. En el espacio vectorial complejo de los estados de momento las relaciones son

$$\mathbf{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \, |p\rangle \, \langle p| \qquad \left\langle p'|p\right\rangle = \delta(p'-p) \qquad f(p) = \langle p|f\rangle \tag{10}$$

- En el espacio vectorial de los estados de posición, una solución sin normalizar de las funciones de onda de los estados de posición propias del operador momento es

$$\hat{p}\,|\Psi\rangle = p\,|\Psi\rangle \qquad \hat{p}\,\langle x|\Psi\rangle = p\,\langle x|\Psi\rangle \qquad \hat{p}\psi(x) = p\psi(x) \tag{11}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} = p\psi(x) \qquad\qquad \psi(x) = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{12}$$

- En el espacio vectorial complejo de los estados de momento, encontramos la siguiente solución a la función de onda de los estados de momento propios del operador posición

$$\hat{x}\,|\Psi\rangle = x\,|\Psi\rangle \qquad \hat{x}\,\langle p|\Psi\rangle = x\,\langle p|\Psi\rangle \qquad \hat{x}\psi(p) = x\psi(p) \tag{13}$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(p)}{\mathrm{d}p} = x\psi(p) \qquad\qquad \psi(p) = \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{14}$$

- Las funciones de onda de los vectores del espacio vectorial complejo de los estados de posición están relacionadas con las de los del espacio vectorial de los estados de momento por la transformada de Fourier

$$\psi(x) = \langle x|\mathbf{1}\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \, \langle x|p\rangle \, \langle p|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(p) \tag{15}$$

$$\psi(p) = \langle p|\mathbf{1}\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \langle p|x\rangle \, \langle x|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(x) \tag{16}$$