

Movimiento intrínseco

Hay partículas subatómicas que tienen un momento angular intrínseco llamado spin, cuyo operador S debe tener el mismo comportamiento que el operador momento angular L sobre la parte angular de la función de onda:

$$[S_i, S_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} S_k \quad (1)$$

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y \quad (2)$$

$$[S^2, S_z] = [S^2, S_{\pm}] = 0 \quad (3)$$

$$[S_z, S_{\pm}] = \hbar S_{\pm} \quad (4)$$

$$S^2 \psi_{sm_s} = s(s+1) \hbar^2 \psi_{sm_s} \quad (5)$$

$$S_z \psi_{sm_s} = m_s \hbar \psi_{sm_s}, \quad (m_s = -s, -s+1, \dots, s) \quad (6)$$

$$S_{\pm} \psi_{sm_s} = \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} \hbar \psi_{sm_s \pm 1} \quad (7)$$

Los fermiones tienen un spin semientero mientras que los bosones entero. Para un electrón de espín $s = \frac{1}{2}$ sólo tiene dos posibles autovalores medidos sobre el eje z que son $m_s = \pm \frac{1}{2} \hbar$ correspondientes a las autofunciones $\psi_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \psi_+$ y $\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \psi_-$. Los autovalores de los operadores S^2 y S_z así como los cambios de función de S_+ y S_- sobre ambas autofunciones comunes son:

$$S^2 \psi_{\pm} = \frac{3}{4} \hbar^2 \psi_{\pm} \quad (8)$$

$$S_z \psi_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \psi_{\pm} \quad (9)$$

$$S_- \psi_+ = \hbar \psi_- \quad (10)$$

$$S_+ \psi_- = \hbar \psi_+ \quad (11)$$

Si los dos estados del electrón se representan mediante vectores de dos dimensiones, los operadores serán matrices 2x2. Los dos estados puros sobre el eje z vienen representados por las autofunciones ψ_{\pm}^z :

$$|\psi_-^z\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_+^z\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

que al ser ortonormales

$$\langle \psi_-^z | \psi_-^z \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (13)$$

$$\langle \psi_+^z | \psi_+^z \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad (14)$$

$$\langle \psi_-^z | \psi_+^z \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

dan lugar a una base del espacio vectorial $\{\psi_-^z, \psi_+^z\}$ que permite expresar cualquier otro estado del electrón como una combinación lineal de los vectores de la base:

$$|\psi\rangle = a|\psi_-^z\rangle + b|\psi_+^z\rangle \quad (16)$$

Sabemos que el operador S_z es una matriz 2x2 y a continuación obtendremos sus elementos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

de la primera ecuación deducimos que $a = \hbar/2$ y $c = 0$, mientras que de la segunda $b = 0$ y $d = -\hbar/2$ y la forma del operador es:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Los operadores S_{\pm} conmutan con S^2 pero no con S_z por lo que cambian las autofunciones sobre las que actúan, la forma matricial de estos operadores se deducen de sus propiedades:

$$\begin{aligned} S_+ \psi_- &= \hbar \psi_+ \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ b &= \hbar, \quad d = 0 \\ S_+ \psi_+ &= 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ a &= 0, \quad c = 0 \\ S_+ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y siguiendo el mismo procedimiento llegamos a:

$$S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

De la relación que existe entre los operadores S_{\pm} , S_x y S_y se deducen la forma de estos dos últimos:

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Autofunciones de los operadores S_x y S_y

Ya conocemos las autofunciones del operador S_z que forman una base de este espacio vectorial, buscaremos las autofunciones de los otros dos operadores que

deberán ser una combinación lineal de los vectores de la base. Aplicamos el operador S_x a una autofunción con valor propio a :

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

llamamos b a $2a/\hbar$ y la solución viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 0-b & 1 \\ 1 & 0-b \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

$$b^2 - 1 = 0, \quad b = \pm 1, \quad a = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (25)$$

que nos dice cuales son los autovalores del spin medidos en el eje x que no podían ser otros que $\pm\hbar/2$. Con este resultados podemos obtener la autofunción con autovalor $+\hbar/2$:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi_1 = \psi_2 \quad (27)$$

denominamos a esta autofunción con ψ_+^x que a falta de conocer una constante es:

$$|\psi_+^x\rangle = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

la constante se conoce por el requisito de normalización:

$$\langle \psi_+^x | \psi_+^x \rangle = 1 \quad (29)$$

$$c^* \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (30)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (31)$$

y finalmente la autofunción con autovalor $+\hbar/2$ es:

$$|\psi_+^x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

siguiendo el mismo procedimiento la autofunción del autovalor $-\hbar/2$ es:

$$|\psi_-^x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

que son una combinación lineal de la base vectorial del espacio:

$$|\psi_+^x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_+^z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_-^z\rangle \quad (34)$$

$$|\psi_-^x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_+^z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_-^z\rangle \quad (35)$$

Repetimos todo lo anterior al aplicar el operador S_y a una autofunción con valor propio a :

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

llamamos b a $2a/\hbar$ y la solución viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 - b & -i \\ i & 0 - b \end{pmatrix} = 0 \quad (37)$$

$$b^2 - 1 = 0, \quad b = \pm 1, \quad a = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (38)$$

los autovalores siguen siendo los mismos $\pm\hbar/2$, y la autofunción con autovalor $+\hbar/2$ es:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} -i\psi_2 \\ i\psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow i\psi_1 = \psi_2 \quad (40)$$

denominamos a esta autofunción con ψ_+^x que a falta de conocer una constante es:

$$|\psi_+^x\rangle = c \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (41)$$

la constante se conoce por el requisito de normalización:

$$\langle \psi_+^x | \psi_+^x \rangle = 1 \quad (42)$$

$$c^* \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 \quad (43)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (44)$$

$$|\psi_+^y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (45)$$

siguiendo el mismo procedimiento la autofunción del autovalor $-\hbar/2$ es:

$$|\psi_-^y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (46)$$

que son una combinación lineal de la base vectorial del espacio:

$$|\psi_+^y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_+^z\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\psi_-^z\rangle \quad (47)$$

$$|\psi_-^y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_+^z\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\psi_-^z\rangle \quad (48)$$

Ejercicio

An angular momentum 1 system is in the state $\chi = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. What is the probability that a measurement of L_x yields a value of 0?

Este sistema tiene momento angular $l = 1$ y por lo tanto podemos medir +1, 0 y -1, que se corresponden a los autoestados:

$$\psi_{+\hbar}^x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \psi_{0\hbar}^x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \psi_{-\hbar}^x = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Son ortonormales y forman una base en el espacio vectorial de momentos angulares, por lo que el estado dado en el que se encuentra el sistema es una combinación lineal de ellos:

$$a\psi_{+\hbar}^x + b\psi_{0\hbar}^x + c\psi_{-\hbar}^x = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\chi = 0.9\psi_{+\hbar}^x - 0.4\psi_{0\hbar}^x - 0.1\psi_{-\hbar}^x \quad (51)$$

la probabilidad de medir cualquiera de los tres valores del momento angular coincide con el cuadrado de los coeficientes de cada uno de los vectores base correspondientes:

$$P_{+\hbar}^x \approx 0.9^2 = 0.81 \quad (52)$$

$$P_{0\hbar}^x \approx 0.4^2 = 0.16 \quad (53)$$

$$P_{-\hbar}^x \approx 0.09^2 = 0.081 \quad (54)$$

tras la medida del momento angular cualquiera de los tres resultados es posible siendo la suma de probabilidades es la unidad.

También podemos aplicar la probabilidad de obtener el valor 0 del momento angular mediante la expresión:

$$P_{0\hbar}^x = |\langle \psi_{0\hbar}^x | \chi \rangle|^2 = b^2 \quad (55)$$

$$P_{0\hbar}^x = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 \approx 0.17 \quad (56)$$