Definición de los operadores creación y aniquilación

El lagrangiano de un oscilador armónico simple (HSO por sus siglas en inglés) de masa unidad viene dado por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{1}$$

y su momento canónico

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{2}$$

y el hamiltoniano es

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{3}$$

y la conmutación canónica

$$[q, p] = i\hbar \tag{4}$$

Reordenamos el contenido del hamiltoniano con la intención de encontrar nuevos operadores lineales que contengan los operadores q y p:

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\omega q - \frac{1}{\sqrt{2}}ip\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\omega q + \frac{1}{\sqrt{2}}ip\right) - \frac{i\omega}{2}\left(qp - pq\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\omega q - \frac{1}{\sqrt{2}}ip\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\omega q + \frac{1}{\sqrt{2}}ip\right) + \frac{\hbar\omega}{2} \\ &= \hbar\omega\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}q - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}}p\right)\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}q + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}}p\right) + \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

llamamos operadores creación y aniquilación respectivamente a los factores

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}q - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}}p \ , \ a = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}q + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}}p \tag{6}$$

que permiten escribir el hamiltoniano en función de ellos

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

Conmutadores entre los operadores creación, aniquilación y hamiltoniano

El conmutador entre estos nuevos operadores es

$$\begin{aligned} \left[a, a^\dagger\right] &= \left(\frac{\omega}{2\hbar}q^2 - \frac{i}{2\hbar}qp + \frac{i}{2\hbar}pq + \frac{1}{2\hbar\omega}p^2\right) \\ &\quad - \left(\frac{\omega}{2\hbar}q^2 + \frac{i}{2\hbar}qp - \frac{i}{2\hbar}pq + \frac{1}{2\hbar\omega}p^2\right) \\ &= -\frac{i}{\hbar}[q, p] = 1 \\ \left[a^\dagger, a\right] &= -1 \end{aligned} \tag{8}$$

y entre el hamiltoniano y cada uno de ellos

$$
\begin{aligned}
[H, a] &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) a - a \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \\
&= \hbar\omega \left(a^\dagger a a - a a^\dagger a\right) = \hbar\omega \left(a^\dagger a - a a^\dagger\right) a \\
&= \hbar\omega [a^\dagger, a] a = -\hbar\omega a \\
\left[H, a^\dagger\right] &= +\hbar\omega a^\dagger
\end{aligned} \tag{9}
$$

Espectro de energía del HSO

Aplicamos el conmutador $[H, a]$ a una función propia u_n con un valor propio del hamiltoniano E_n

$$
[H, a]u_n = Hau_n - aHu_n = Hau_n - E_n au_n = -\hbar\omega a u_n \tag{10}
$$

hacemos lo mismo con el conmutador $[H, a^\dagger]$ y obtenemos

$$
\begin{aligned}
Hau_n &= (E_n - \hbar\omega)\, au_n \\
Ha^\dagger u_n &= (E_n + \hbar\omega)\, a^\dagger u_n
\end{aligned} \tag{11}
$$

vemos que $a^\dagger u_n$ es una función propia del hamiltoniano con una energía superior en $\hbar\omega$ con respecto a la función propia u_n, y por el contrario au_n una energía inferior, esto sugiere que como no puede existir el HSO con energías negativas, si identificamos el nivel mas bajo de energía E_0 correspondiente a la función propia u_0, se debe cumplir que

$$
au_0 = 0 \tag{12}
$$

y el valor propio del hamiltoniano de esta función resulta ser

$$
Hu_0 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) u_0 = \hbar\omega a^\dagger \cancel{au_0} + \frac{\hbar\omega}{2} u_0 = \frac{\hbar\omega}{2} u_0 \tag{13}
$$

de la misma manera el hamiltoniano de la función propia a_1 tiene el siguiente valor propio

$$
\begin{aligned}
Hu_1 =& Ha^\dagger u_0 = \left[H, a^\dagger\right] u_0 \\
& + a^\dagger H u_0 = \hbar\omega a^\dagger u_0 + \frac{\hbar\omega}{2} a^\dagger u_0 = \hbar\omega \left(1 + \frac{1}{2}\right) a^\dagger u_0 \\
=& \hbar\omega \left(1 + \frac{1}{2}\right) u_1
\end{aligned} \tag{14}
$$

por lo que el espectro de energías viene dado por la expresión

$$
E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \tag{15}
$$

Operador N

Definimos el operador N como $a^\dagger a$

$$
Hu_n = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) u_n = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right) u_n \tag{16}
$$

que tiene el valor propio

$$Nu_n = nu_n \tag{17}$$

y su conmutación con los operadores creación y aniquilación es

$$\begin{aligned} [N,a] &= Na - aN = a^\dagger aa - aa^\dagger a = [a^\dagger, a]a = -a \\ \left[N, a^\dagger\right] &= a^\dagger \end{aligned} \tag{18}$$

La relación entre los diferentes estados obtenidos de la aplicación del operador creación la obtenemos de la normalización, suponemos que las funciones propias están normalizadas

$$\begin{aligned} a^\dagger u_n =& C u_{n+1} \ , \ \langle u_n| \, aa^\dagger \, |u_n\rangle = C^2 \\ \langle u_n| \, aa^\dagger \, |u_n\rangle =& \langle u_n| \, [a, a^\dagger] + a^\dagger a \, |u_n\rangle \\ =& \langle u_n| \, 1 + a^\dagger a \, |u_n\rangle = \langle u_n| \, N + 1 \, |u_n\rangle = n + 1 \\ C =& \sqrt{n+1} \ , \ a^\dagger u_n = \sqrt{n+1} \ u_{n+1} \end{aligned} \tag{19}$$

y entre los estados relacionados con el operador aniquilación

$$\begin{aligned} au_n =& C u_{n-1} \ , \ \langle u_n| \, a^\dagger a \, |u_n\rangle = C^2 \\ \langle u_n| \, N \, |u_n\rangle =& n \ , \ C = \sqrt{n} \ , \ au_n = \sqrt{n} \ u_{n-1} \end{aligned} \tag{20}$$

Operadores q y p en la imagen de Heisenberg

Expresamos los operadores q y p en función de los operadores creación y aniquilación

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(a + a^\dagger\right) \ , \ p = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left(a - a^\dagger\right) \tag{21}$$

que usamos para obtener las expresiones de los operadores en la imagen de Heisenberg

$$\begin{aligned} q(t) =& e^{iHt/\hbar} \ q \ e^{-iHt/\hbar} = e^{iHt/\hbar} \ \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(a + a^\dagger\right) \ e^{-iHt/\hbar} \\ =& \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \ e^{iHt/\hbar} \ a \ e^{-iHt/\hbar} + \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \ e^{iHt/\hbar} \ a^\dagger \ e^{-iHt/\hbar} \\ =& \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \ a(t) + \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \ a^\dagger(t) \end{aligned} \tag{22}$$

la evolución temporal del operador en la imagen de Hisenberg cumple la relación

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = [a(t), H] = \hbar\omega a(t) \tag{23}$$

de donde se deduce

$$a(t) = e^{-i\omega t} a(0) \ , \ a^\dagger(t) = e^{i\omega t} a^\dagger(0) \tag{24}$$

y finalmente

$$q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(e^{-i\omega t} a + e^{i\omega t} a^\dagger\right) \ , \ p(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left(e^{-i\omega t} a - e^{i\omega t} a^\dagger\right) \tag{25}$$