Por definición, la métrica es una aplicación entre vectores y covectores en un punto dado de una variedad, y debe ser invertible para asociar un covector a su vector:

$$V_\beta = g_{\alpha\beta}\ V^\alpha \qquad\qquad W^\gamma = g^{\alpha\gamma}\ W_\gamma \tag{1}$$

$$V_\beta W^\gamma = g_{\alpha\beta}\ V^\beta\ g^{\alpha\gamma}\ W_\alpha = V^\beta W_\gamma \qquad\qquad g_{\alpha\beta}\ g^{\alpha\gamma} = \delta_\beta{}^\gamma \tag{2}$$

La existencia de la inversa de la métrica, diferente de cero, siempre se puede mostrar como una matriz diagonalizable. Supongamos que tenemos una métrica en un espacio de cuatro dimensiones, entonces su determinante viene dado por el producto de sus componentes

$$g = \det\ g_{\alpha\beta} = g_{00}\ g_{11}\ g_{22}\ g_{33} \tag{3}$$

cuya derivada con respecto a un parámetro x^μes

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \partial_\mu g = g_{,\mu} = & \\ & g_{00,\mu}\ g_{11}\ g_{22}\ g_{33} + g_{00}\ g_{11,\mu}\ g_{22}\ g_{33} + \\ & g_{00}\ g_{11}\ g_{22,\mu}\ g_{33} + g_{00}\ g_{11}\ g_{22}\ g_{33,\mu} \end{aligned} \tag{4}$$

una expresión que puede simplificarse al multiplicar cada sumando por la unidad correspondiente $g_{00}\ g^{00} = g_{11}\ g^{11} = g_{22}\ g^{22} = g_{33}\ g^{33} = 1$, visualizamos lo que ocurre en el primer sumando

$$g_{00,\mu}\ g^{00}\ g_{00}\ g_{11}\ g_{22}\ g_{33} = g_{00,\mu}\ g^{00}\ g \tag{5}$$

y de forma general

$$g_{,\mu} = g\ g^{\alpha\beta}\ g_{\alpha\beta,\mu} \tag{6}$$