En una de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corriente aparece la ecuación de onda de la luz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \tag{2}$$

las ecuaciones (2) reflejan que una oscilación temporal del campo eléctrico genera otra en el magnético y esta de nuevo en el eléctrico y así sucesivamente. Derivamos con respecto al tiempo la segunda de las ecuaciones (2)

$$\nabla \times \partial_t \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E} \tag{3}$$

sustituimos en el primer miembro la primera ecuación de (2) y resolvemos la doble aplicación del operador rotacional

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\cancelto{0}{\nabla \cdot \mathbf{E})} + \nabla^2 \mathbf{E} \tag{4}$$

de donde obtenemos la ecuación que debe satisfacer el campo eléctrico

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \ \partial_t^2 \mathbf{E} = 0 \tag{5}$$

para que esta ecuación sea la de una onda debe cumplirse que

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{v^2} \tag{6}$$

de los valores de la constante eléctrica y de la constante magnética $\epsilon_0 = 1'256637061 \cdot 10^{-6}$ y $\mu_0 \epsilon_0 = 8'854187818 \cdot 10^{-12}$, se obtiene que la velocidad de la onda es la de la luz $v = c$. La misma ecuación de onda se obtiene para la oscilación del campo magnético

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} = 0 \tag{7}$$

La ecuación de onda viene caracterizada por su frecuencia angular ω relacionada con la frecuencia $2\pi\nu$ y por su número de onda k relacionado con la longitud de onda $2\pi/\lambda$, ambas relacionadas por la velocidad de propagación $\omega = kc$. Para encontrar una solución a la ecuación de onda del campo eléctrico usamos la ecuación (5), y para simplificar el cálculo tomaremos un campo paralelo al eje y, $\mathbf{E} \equiv (0, E(x,t), 0)$, y que la oscilación se propaga en la dirección del eje x

$$\partial_x^2 E_y(x,t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E_y(x,t) = 0 \tag{8}$$

$$E_y = E_0 \sin(kx - wt) \tag{9}$$

y para encontrar la solución de la ecuación de onda del campo magnético usamos la primera ecuación de (2)

$$\partial_x E_y \hat{k} = -\partial_t \mathbf{B} \tag{10}$$
$$-kE_0 \cos(kx - wt) = -\partial_t B_z \tag{11}$$
$$B_z = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kx - wt) = \frac{E_0}{c} \sin(kx - wt) \tag{12}$$

con lo que comprobamos que las oscilaciones de los campos eléctrico y magnético están en fase pero son ortogonales. Estas expresiones podemos representarlas de forma sencilla si se trata de luz monocromática cuya frecuencia es constante

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{j}} e^{i(kx - wt)} \qquad \mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \hat{\mathbf{k}} e^{i(kx - wt)} \tag{13}$$

y las generalizamos considerando el número de ondas como un vector $\mathbf{k} = k\hat{k}$ y las amplitudes como vectores reales o complejos $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{B}_0$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - wt)} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{kr} - wt)} \tag{14}$$

al aplicarles las ecuaciones de Maxwell obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \tag{15}$$
$$i\mathbf{k}\mathbf{E} = 0 \qquad i\mathbf{k}\mathbf{B} = 0 \qquad i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{B}_0 \tag{16}$$

las dos primeras ecuaciones de (16) nos dicen que las direcciones de los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de la propagación de la onda, y la tercera que los campos son perpendiculares entre sí. En este resultado vemos que la dirección de la oscilación es fija, luz polarizada linealmente, y esto se debe a que hemos supuesto que las amplitudes son reales. En el caso de ser complejas, como por ejemplo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ la parte real del campo es $\mathbf{E} = \mathbf{a}\cos(\mathbf{kx} - wt) + \mathbf{b}\sin(\mathbf{kx} - wt)$ con la condición impuesta por las leyes de Maxwell $\mathbf{ak}\sin(\mathbf{kx} - wt) = \mathbf{bk}\cos(\mathbf{kx} - wt)$, de donde se deduce que la dirección de la oscilación cambia en un plano perpendicular a la propagación de la onda, formando un círculo si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ y una elipse si fueran diferentes, en este caso se dice que la polarización es elíptica.

La solución general es que la ecuación de onda consiste en una superposición de ondas de diferentes números de onda, desarrollo en serie de Fourier de ondas planas multiplicadas por coeficientes que también dependen de la frecuencia ya que $\omega = kc$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 k \mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kr} - wt)} \tag{17}$$

Finalmente intentaremos comprender como es el transporte de la energía a través de las ondas electromagnéticas y empezamos por la ecuación ya conocida de la energía almacenada en los campos eléctrico y magnético

$$U = \int_V \mathrm{d}^3 x \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{EE} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{BB} \right) \tag{18}$$

que vamos a derivar con respecto al tiempo

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3 x \left(\epsilon_0 \ \mathbf{E} \ \partial_t \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \ \mathbf{B} \ \partial_t \mathbf{B} \right) \tag{19}$$

usamos las leyes de Ampére-Maxwell y de Faraday para sustituir las derivadas temporales de los respectivos campos y el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= \int_V \mathrm{d}^3 x \left(\epsilon_0 \ \mathbf{E} \ \left(\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0 \epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J} \right) \partial_t \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \left(-\nabla \times \mathbf{E} \right) \right) && (20) \\
&= - \int_V \mathrm{d}^3 x \ \mathbf{E} \ \mathbf{J} + \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 x \ \left(\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \times \mathbf{E}) \right) && (21) \\
&= - \int_V \mathrm{d}^3 x \ \mathbf{E} \ \mathbf{J} - \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 x \ \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) && (22) \\
&= - \int_V \mathrm{d}^3 x \ \mathbf{E} \ \mathbf{J} - \frac{1}{\mu_0} \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \ \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) && (23)
\end{aligned}$$

reordenamos el resultado obtenido para interpretarlo

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \int_V \mathrm{d}^3 x \ \mathbf{E} \ \mathbf{J} = - \frac{1}{\mu_0} \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \ \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) \tag{24}$$

el cambio que experimentan la energía almacenada de los campos estáticos y las partículas en un determinado volumen está relacionado, para que la energía se conserve, con el flujo de energía a través de la superficie que encierra dicho volumen. Vamos a comprobar para una onda polarizada linealmente si la dirección de propagación coincide con la del flujo, para ello modificamos las ecuaciones de los campos (14) con la condición (16) tomando la parte real

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-wt)} \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0) e^{i(\mathbf{kr}-wt)} \tag{25}$$

$$= \frac{E_0^2}{c\mu_0} \hat{\mathbf{k}} \sin^2(\mathbf{kx} - wt) \tag{26}$$

calculamos la densidad de energía almacenada por los campos de la onda, el integrando de la ecuación (18) y sustituimos en la anterior ecuación

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}\ \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}\ \mathbf{B} = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\mathbf{kx} - wt) \tag{27}$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = c\ u\ \hat{\mathbf{k}} \tag{28}$$

que confirma que el flujo de energía tiene la dirección de la propagación y es proporcional a la densidad de energía, en un factor c.