1 Potenciales gauge de Coulomb

Sabemos que un campo vectorial solenoidal, su divergencia es nula, es una condición suficiente para que exista un campo potencial vectorial, el campo magnético cumple esta condición por la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1}$$

Un campo vectorial irrotacional, su rotacional es nulo, es una condición suficiente para la existencia de un campo potencial escalar, el campo eléctrico se comporta de esta manera en ausencia de campo variables por la ley de Faraday de la electrostática

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\nabla \cdot \phi) = 0 \qquad \mathbf{E} = -\nabla \cdot \phi \tag{2}$$

pero si los campos son variables con el tiempo la ley de Faraday no es homogénea y aparece otro término relacionado con el potencial vectorial

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (-\nabla \cdot \phi) - \nabla \times \partial_t \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\nabla \cdot \phi - \partial_t \mathbf{A} \tag{3}$$

La elección del potencial vectorial no es unívoca, por ejemplo se podía haber añadido un campo escalar χ al potencial vectorial que no influye en el valor del campo magnético

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \cdot \chi \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} \tag{4}$$

que también se añade al campo potencial escalar para que no influya en el valor del campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla \cdot \phi' - \partial_t \mathbf{A}' = -\nabla \cdot \phi' - \nabla \cdot \partial_t \chi - \partial_t \mathbf{A} \qquad \phi' = \phi - \partial_t \chi \tag{5}$$

Siempre se puede encontrar ese escalar χ aunque se exija la condición de que $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$, conocida con el nombre de gauge de Coulomb, ya que $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi = 0$ conduce a la ecuación diferencial conocida como la ecuación de Poisson que siempre tiene solución.

2 Aplicación de la función de Green

Sustituimos el campo eléctrico por su potencial escalar en la ecuación de la ley de Gauss de la electrostática

$$\nabla \cdot (-\nabla \cdot \phi) = -\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6}$$

obtenemos la ecuación de Poisson que resolveremos aplicando la función de Green. La función de Green $G(\alpha; t)$ actúa en una integral de forma que $g(\alpha) = \int f(t) G(\alpha; t) \mathrm{d}t$ y se usa para resolver ecuaciones diferenciales, desde las más simples hasta las mas complicadas con condiciones de frontera.
El laplaciano ∇^2 es un operador que actúa sobre la función $\phi(\mathbf{r})$ dando lugar a otra función $-\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$, la función de Green buscada es tal que al aplicarle este operador se obtiene la función delta de Dirac:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{7}$$

multiplicamos ambos miembros por la otra función $\rho(\mathbf{r}')$ e integramos con respecto a $\mathbf{r}'$

$$\int \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \mathrm{d}^3\mathbf{r}' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \tag{8}$$

como el operador actúa sobre la variable $\mathbf{r}$ solamente

$$\nabla^2 \int G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \mathrm{d}^3\mathbf{r}' = -\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) \tag{9}$$

de donde deducimos que

$$\phi(\mathbf{r}) = -\int G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{10}$$

Teniendo en cuenta la condición frontera, para una distribución de carga puntual el campo eléctrico escalar es función de la inversa de la distancia $r \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ dado por $\phi = Q/4\pi\epsilon_0 r$, la función de Green debe contener el término $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ o $1/r$. Completamos esta función integrando (7) a todo el volumen

$$\int_V \nabla^2 G(\mathbf{r};\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_V \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r} = 1 \tag{11}$$

resolvemos el primer término

$$\begin{aligned}\int_V \nabla^2 \frac{1}{r}\mathrm{d}^3\mathbf{r} &= \int_V \nabla(\nabla\frac{1}{r})\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_S \nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}\mathbf{a}\\ &= \int_S \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{a} = \int_S -\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{a} = -4\pi\frac{R^2}{r^2}\end{aligned}$$

un resultado que se obtiene de la integración sobre el volumen de una esfera de radio R, que se anula si $r < R$ cuando $R \to 0$ y toma el valor -4π cuando $r = R$ y $R \to 0$, siendo la función de Green buscada

$$G(\mathbf{r};\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} \tag{12}$$

llevada a la ecuación (10) obtenemos finalmente la función del potencial escalar

$$\phi(\mathbf{r}) = -\int -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{13}$$

Para encontrar un expresión parecida a la anterior para el potencial vectorial, sustituimos el campo magnético por el potencial vectorial en la ley de Ampère teniendo en cuenta el gauge de Coulomb

$$\nabla\times\mathbf{B} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\cdot\cancelto{0}{(\nabla\cdot\mathbf{A})} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} \tag{14}$$

volvemos a aplicar la función de Green a la resolución de la ecuación de Poisson $\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}$ resultante

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{15}$$

3 Densidades y potenciales en forma tensorial

La ecuación de continuidad se deduce de la propia definición de densidad de corriente $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ donde ρ es la densidad de carga

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{J} = 0 \tag{16}$$

haciendo unos arreglos obtenemos

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\partial_t \rho c}{c} + \nabla\mathbf{J} = 0 & \begin{pmatrix}\partial_t/c & \nabla\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho c\\ \mathbf{J}\end{pmatrix} = 0 \\ \partial_\mu \equiv \begin{pmatrix}\partial_t/c & \nabla\end{pmatrix} & J^\mu \equiv \begin{pmatrix}\rho c\\ \rho\mathbf{v}\end{pmatrix} \end{array} \tag{17}$$

el índice μ toma los valores 0, 1, 2 y 3 correspondiente a las coordenadas (ct, x, y, z) del espacio de cuatro dimensiones pseudoeuclídeo de Minkowski, y los elementos que contiene son tensores como el que incluye el escalar densidad de carga y el vector densidad de corriente $(\rho c, J^x, J^y, J^z)$, y el que incluye la derivada temporal y las tres espaciales ∂_t/c, ∂_x, ∂_y, ∂_z, el primero es un tensor de rango $(1,0)$ y el segundo de rango $(0,1)$. Aplicamos la definición de tensor a ambos, un tensor de rango $(0,1)$ es una función que toma como argumento un tensor de rango $(1,0)$ y nos devuelve su producto escalar

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \partial_1 J^1 + \partial_2 J^2 + \partial_3 J^3 = \frac{\partial_t}{c}\rho c + \partial_i J^i = \partial_t\rho + \mathbf{J}{=}0 \tag{18}$$

hemos aplicado el convenio de sumatorio de Einstein para índices repetidos, y de nuevo tenemos la ecuación de continuidad (16).

Un observador en reposo que observa una distribución de cargas en reposo, asignará las componentes $J^0 = \rho c$ y $J^i = 0$ (los índices i se refieren a las tres coordenadas espaciales) al tensor densidad de corriente, mientras que otro observador que se mueva con velocidad uniforme v_x asignará unas componentes diferentes, obtenidas por la transformación de Lorentz $J'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, J^{\nu}$ con $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x/c & 0 & 0 \\ -\gamma v_x/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} J'^0 &= \Lambda^0_\nu J^\nu = \Lambda^0_0 J^0 + \Lambda^0_1 J^1 + \Lambda^0_2 J^2 + \Lambda^0_3 J^3 = \gamma\rho c \\ J'^1 &= \Lambda^1_\nu J^\nu = \Lambda^1_0 J^0 + \Lambda^1_1 J^1 + \Lambda^1_2 J^2 + \Lambda^1_3 J^3 = -\gamma\rho v_x \\ J'^2 &= J'^3 = 0 \end{aligned}$$

el observador en movimiento considera que hay una corriente eléctrica en dirección $-v_x$ porque asigna a la componente temporal $J'^0 = \gamma\rho c$ y a la componente espacial $J'^x = -\gamma\rho v_x$.

La introducción del tensor densidad de corriente nos orienta para obtener el tensor potencial eléctrico que incluirá el escalar y el vectorial, y para ello escribimos en forma de componentes la ecuación (15) para compararla con la ecuación (13), teniendo en cuenta que $c^2\mu_o\epsilon_0 = 1$

$$\begin{aligned} A^\mu &= \frac{1}{4\pi c^2\epsilon_0}\int \frac{J^\mu}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\ A^0 &= \frac{1}{4\pi c^2\epsilon_0}\int \frac{\rho c}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \phi/c \\ A^i &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J^i}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\ A^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

la condición gauge de Coulomb ahora toma la forma $\partial\mu\mathbf{A}^\mu = 0$ y recibe el nombre de gauge de Lorentz.

El tensor métrico $\eta^{\mu\nu}$ define la geometría del espacio de cuatro dimensiones de Minkowski, tiene la propiedad de ser igual a su inverso $\eta_{\mu\nu}$, y es de rango $(2,0)$ con dieciséis componentes $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$ (de forma abreviada $\eta_{ii} = -1$) y las doce restantes nulas. Aplicado a los tensores de componentes ∂_μ, J^μ y A^μ se obtienen sus duales ∂^μ, J_μ y A_μ

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu \qquad J_\mu = \eta_{\mu\nu}J^\mu \qquad A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\mu \tag{21}$$

$$\partial^0 = \eta^{00}\partial_0 = \partial/c \qquad A_0 = \eta_{00}A^0 = \frac{\phi}{c} \qquad A_0 = \eta_{00}A^0 = \frac{\phi}{c}$$

$$\partial^i = \eta^{ii}\partial_i = -\partial_i \qquad J_i = \eta_{ii}J^i = -J^i \qquad A_i = \eta_{ii}A^i = -A^i$$

$$\partial^\mu \equiv \begin{pmatrix} \partial_t/c \\ -\nabla \end{pmatrix} \qquad J_\mu \equiv \begin{pmatrix} \rho c & -\rho\mathbf{v} \end{pmatrix} \qquad A_\mu \equiv \begin{pmatrix} \phi/c & -\mathbf{A} \end{pmatrix} \tag{22}$$

4 El tensor electromagnético

El tensor electromagnético es un tensor antisimétrico por su definición

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{23}$$

comprobaremos que las componentes de la diagonal son nulas y que el resto están relacionadas con los campos eléctrico y magnético

$$\begin{gathered}
F_{00} = \partial_0 A_0 - \partial_0 A_0 = 0 \\
F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial_t}{c}(-A_x) - \partial_x \frac{\phi}{c} = \frac{E_x}{c} = -F_{10} \\
F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = \partial_x(-A_z) - \partial_z(-A_x) = B_y = -F_{31}
\end{gathered}$$

que visualizamos mediante la matriz donde el primer índice se refiere a la fila y el segundo a la columna

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_x & B_y \\ -E_y/c & B_x & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

de la doble aplicación del tensor métrico del espacio de Minkwoski se obtiene el tensor dual

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma}F_{\lambda\sigma} \tag{25}$$

repetimos el cálculo hecho anteriormente

$$\begin{gathered}
F^{01} = \eta^{0\lambda}\eta^{1\sigma}F_{\lambda\sigma} = \eta^{00}\eta^{11}F_{01} = 1(-1)F_{01} \\
F^{13} = \eta^{1\lambda}\eta^{3\sigma}F_{\lambda\sigma} = \eta^{11}\eta^{33}F_{13} = (-1)(-1)F_{13}
\end{gathered}$$

que visualizamos mediante una matriz

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_x & B_y \\ E_y/c & B_x & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Para un observador inercial que se aleja con velocidad v_x de otro en reposo, obtendrá otras componentes del tensor electromagnético

$$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x/c & -E'_y/c & -E'_z/c \\ E'_x/c & 0 & -B'_x & B'_y \\ E'_y/c & B'_x & 0 & -B'_x \\ E'_z/c & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

pero ambos tensores están relacionados mediante la transformación de Lorentz (19)

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\lambda\sigma} \tag{28}$$

Calculamos las siguientes componentes F'^{10}, F'^{03} y F'^{21}

$$\begin{aligned}
F'^{10} &= \Lambda^1{}_\lambda \Lambda^0{}_\sigma F^{\lambda\sigma} \\
&= \Lambda^1{}_0\Lambda^0{}_0\cancelto{0}{F^{00}} + \Lambda^1{}_0\Lambda^0{}_1F^{01} + \Lambda^1{}_0\cancelto{0}{\Lambda^0{}_2}F^{02} + \Lambda^1_0\cancelto{0}{\Lambda^0{}_3}F^{03} \\
&+ \Lambda^1{}_1\Lambda^0{}_0F^{10} + \Lambda^1{}_1\Lambda^0{}_1\cancelto{0}{F^{11}} + 0 + 0 \\
&+ \cancelto{0}{\Lambda^1{}_2}\ldots \\
E'_x/c &= \gamma^2 v^2/c^2(-E_x/c) + \gamma^2 E_x/c = \gamma^2(1 - v^2/c^2)E_x/c = E_x/c
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F'^{03} &= \Lambda^0{}_\lambda \Lambda^3{}_\sigma F^{\lambda\sigma} \\
&= \Lambda^0{}_0 \cancelto{0}{\Lambda^3{}_0} F^{03} + \Lambda^0{}_0 \cancelto{0}{\Lambda^3{}_1} F^{01} + \Lambda^0{}_0 \cancelto{0}{\Lambda^3{}_2} F^{02} + \Lambda^0{}_0 \Lambda^3{}_3 F^{03} \\
&+ \Lambda^0{}_1 \cancelto{0}{\Lambda^3{}_0} F^{10} + 0 + 0 + \Lambda^0{}_1 \Lambda^3{}_3 F^{13} \\
&+ \cancelto{0}{\Lambda^0{}_2} \ldots \\
-E'_z/c &= \gamma(-E_z/c) + (-\gamma v/c)B_y = -\gamma/c(E_z + vB_y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F'^{21} &= \Lambda^2{}_\lambda \Lambda^1{}_\sigma F^{\lambda\sigma} \\
&= \cancelto{0}{\Lambda^2{}_0} \ldots \\
&+ \cancelto{0}{\Lambda^2{}_1} \ldots \\
&+ \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_0 F^{20} + \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_1 F^{21} + \Lambda^2{}_2 \cancelto{0}{\Lambda^1{}_2} F^{22} + \Lambda^2{}_2 \cancelto{0}{\Lambda^1{}_3} F^{23} \\
&+ \cancelto{0}{\Lambda^2{}_3} \ldots \\
B'_z &= -\gamma v/cE_y/c) + \gamma B_z = \gamma(B_z - E_y v/c^2)
\end{aligned}
$$

y el resultado final es

$$
E'_x = E_x \qquad E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \qquad E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \tag{29}
$$

$$
B'_x = B_x \qquad B'_y = \gamma(B_y + E_z v/c^2) \qquad B'_z = \gamma(B_z - E_y v/c^2) \tag{30}
$$

ambos observadores ven los mismos campos eléctrico y magnético en la dirección de movimiento porque la dirección de los campos es perpendicular, sin embargo en las otras direcciones un campo eléctrico para el observador en reposo es modificado por otro magnético para el observador en movimiento, y un campo magnético para el observador en reposo es modificado por otro eléctrico, según el observador en movimiento.

5 Forma tensorial de las ecuaciones de Maxwell

Las componentes en los tensores que hemos introducido son distintas cuando son medidas por dos observadores inerciales, sin embargo ambos medirán el mismo módulo, porque al ser un escalar no depende de las coordenadas del sistema de referencia.
Comprobamos esta afirmación con el tensor densidad de corriente, ambos observadores medirán el valor ρc

$$
J'^{\mu} J' \mu = \gamma^2(\rho c^2 - \rho v^2) = \rho^2 c^2 = J^{\mu} J_{\mu} \tag{31}
$$

El escalar que también medirán por igual ambos observadores inerciales será el módulo (raíz cuadrada del siguiente resultado) del tensor electromagnético

$$
F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\left(-\frac{\mathbf{E}}{c^2} + \mathbf{B}^2\right) \tag{32}
$$

Estos tensores J^{μ} y $F^{\mu\nu}$ permiten escribir las leyes de Maxwell en forma tensorial

$$
\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu} \qquad \partial_{\mu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0 \ (\rho < \sigma) \tag{33}
$$

en la segunda expresión aparece el tensor permutación, o tensor de Levi-Civita, que tiene el siguiente comportamiento

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si la permutación es par} \\ -1 & \text{si la permutación es impar} \\ 0 & \text{para algún índice repetido} \\ -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} & \end{cases} \tag{34}$$

La ley de Gauss se obtiene derivando en la misma dirección espacial del primer índice del tensor electromagnético solamente la dirección 0 del segundo índice

$$\begin{aligned} \partial_i F^{i0} &= \mu_0 J^0 \\ \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \mu_0 \rho c \\ \partial_x \frac{E_x}{c} + \partial_y \frac{E_y}{c} + \partial_y \frac{E_x}{c} &= \mu_0 \rho c \end{aligned} \tag{35}$$

la ley de Ampère-Maxwell derivando en la misma dirección de las coordenadas espaciotemporales cada una de las direcciones espaciales

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 J^i \tag{36}$$

calculamos la variación en la dirección $\hat{\imath}$, donde $i = 1$

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_1 \cancelto{0}{F^{11}} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \mu_0 J^1 \\ \frac{1}{c}\partial_t \frac{-E_x}{c} + \partial_y B_z + \partial_z(-B_y) &= \mu_0 J_x \end{aligned}$$

repetimos el mismo cálculo para las otras dos direcciones $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ y sumamos

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{c^2}\partial_t(E_x\hat{\imath} + \partial_t E_y\hat{\jmath} + \partial_t E_z\hat{k}) + (\partial_y B_z - \partial_z B_y)\hat{\imath} \\ &+ (\partial_z B_x - \partial_x B_z)\hat{\jmath} + (\partial_x B_y - \partial_y B_x)\hat{k} = \mu_0(J_x\hat{\imath} + J_y\hat{\jmath} + J_z\hat{k}) \end{aligned}$$

La ley de Gauss para el magnetismo se obtiene derivando con respecto a las direcciones espaciales la componente temporal de las componentes del tensor electromagnético, modificadas por el tensor permutación y teniendo en cuenta la condición $\rho < \sigma$

$$\begin{aligned} \partial_i \epsilon^{i0\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= 0 \\ \partial_x \epsilon^{10\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \partial_y \epsilon^{20\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \partial_z \epsilon^{30\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= 0 \\ \partial_x \epsilon^{1023} F_{23} + \partial_y \epsilon^{2013} F_{13} + \partial_z \epsilon^{3012} F_{12} &= 0 \\ \partial_x(-1)(-B_x) + \partial_y(+1)B_y + \partial_z(+1)B_z &= 0 \end{aligned} \tag{37}$$

y la ley de Faraday derivando en las cuatro direcciones espaciotemporales cada una de las direcciones espaciales de las componentes del tensor electromagnético, modificadas por el tensor permutación y teniendo en cuenta la condición $\rho < \sigma$ también

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu i\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0 \tag{38}$$

de nuevo calculamos la variación en la dirección $\hat{\imath}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\partial_t \epsilon^{0123} F_{23} + \cancelto{0}{\partial_x \epsilon^{11\rho\sigma}} F_{\rho\sigma} + \partial_2 \epsilon^{2103} F_{03} + \partial_3 \epsilon^{3102} F_{02} &= 0 \\ \frac{1}{c}\partial_t(+1)(-B_x) + \partial_y(-1)\frac{E_z}{c} + \partial_z(+1)\frac{E_y}{c} &= 0 \\ \partial_t B_x + (\partial_y E_z - \partial_z E_y) &= 0 \end{aligned}$$

repetimos el mismo cálculo para las otras dos direcciones $\hat{j}$ y $\hat{k}$ y sumamos

$$\partial_t(B_x\hat{\imath} + \partial_t B_y\hat{\jmath} + \partial_t B_z\hat{k}) + (\partial_y E_z - \partial_z E_y)\hat{\imath}$$
$$+ (\partial_z E_x - \partial_x E_z)\hat{\jmath} + (\partial_x E_y - \partial_y E_x)\hat{k} = 0$$

Resumimos a continuación las leyes de Maxwell escritas en forma vectorial y tensorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \partial_i F^{i0} = \mu_0 J^0 \tag{39}$$

$$-\mu_0\epsilon_0\ \partial_t\mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \qquad \partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 J^i \tag{40}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t\mathbf{B} = 0 \qquad \partial_\mu \epsilon^{\mu i\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0 \tag{41}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \partial_i \epsilon^{i0\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0 \tag{42}$$