Resumen

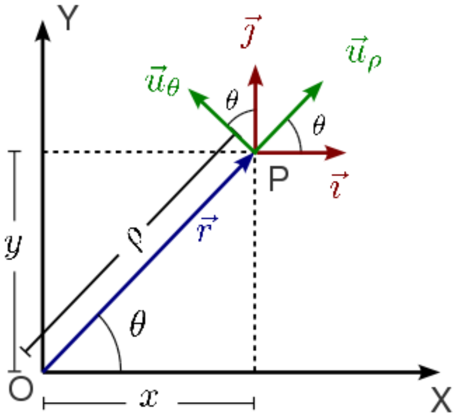
El uso de coordenadas curvílineas obliga introducir conceptos como tensor y derivada covariante para establecer el transporte paralelo, ya que en cartesianas no hay distinción entre ellos, debido a que los vectores de la base son constantes en todos los puntos del espacio. Concretamente usaremos las coordenadas polares.

Sistemas de coordenadas

Un sistema de coordenadas sirve para identificar cada uno de los puntos del espacio x^μ y un desplazamiento infinitesimal $\mathrm{d}x^\mu$ en la dirección $\vec{e}_\mu$ define un vector en ese punto $\mathrm{d}\vec{x}$

$$\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}x^\mu \vec{e}_\mu \tag{1}$$

siendo $\{\vec{e}_\mu\}$ una base de vectores, de forma que cualquier vector puede escribirse como una combinación lineal de los mismos.



Ejercicio 1. *¿Cual es la matriz de transformación de la base de vectores cartesiana a la polar y viceversa?*

Solución. De la imagen se deduce la relación entre las coordenadas cartesianas y polares

$$x = \rho\ \cos\varphi;\ \ y = \rho\ \operatorname{sen}\varphi$$

y a partir de la ecuación (1) aplicamos el jacobiano, donde hemos simplificado la notación por $\frac{\partial}{\partial\rho}$ por δ_ρ

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \partial_\rho x\ \vec{e}_x + \partial_\rho y\ \vec{e}_y = \cos\varphi\vec{e}_x + \operatorname{sen}\varphi\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= \partial_\varphi x\ \vec{e}_x + \partial_\varphi y\ \vec{e}_y = -\rho\operatorname{sen}\varphi\vec{e}_x + \rho\cos\varphi\vec{e}_y\end{aligned}$$

con la que obtenemos la matriz de transformación directa e inversa

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\rho\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\ \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x \\ \vec{e}_y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_x \\ \vec{e}_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \rho\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\ \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. *¿Cual es el producto escalar de los vectores de la base cartesiana, y el de la polar?*

Solución. De las matrices de transformación calculamos el producto escalar de los vectores de la base cartesiana

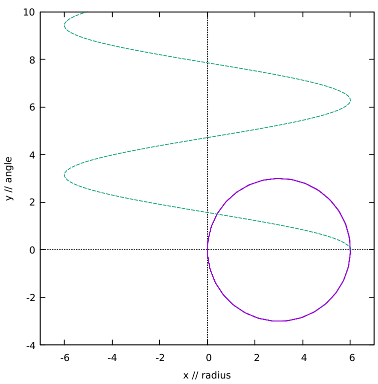
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1 \ ; \ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

y el producto escalar de los de la base polar

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = 1 \ ; \ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \rho^2 \ ; \ \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$

Estos productos escalares de los vectores de las bases permiten expresar el cuadrado de la longitud $\mathrm{d}s$, llamado también elemento de línea, de un desplazamiento infinitesimal en ambos sistemas de coordenadas $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ y $(\mathrm{d}\rho, \mathrm{d}\varphi)$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\varphi^2 \tag{2}$$



Ejercicio 3. *¿Qué valor tiene el elemento de línea de un movimiento dado por las ecuaciones de movimiento $\rho = A\ \cos\omega t$ y $\varphi = \omega\ t$, donde ρ viene en m, ω en rad/s y t en s?*

Solución. Calculamos las diferenciales de las componentes radial y angular

$$\mathrm{d}\rho = -A\ \omega \operatorname{sen}\omega t\ \mathrm{d}t \ ; \ \mathrm{d}\varphi = \omega\ \mathrm{d}t$$

que sustituimos en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= A^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t\ \mathrm{d}t^2 + A^2\omega^2 \cos^2 \omega t\ \mathrm{d}t^2 = A^2\omega^2\ \mathrm{d}t^2 \\ \mathrm{d}s &= A\ \omega\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

donde observamos que la distancia recorrida es una función lineal del tiempo, multiplicado por la amplitud A y la velocidad angular ω. En la gráfica hemos representado el movimiento de los 5 primeros segundos, en línea continua en el plano $x - y$ y a trazos en el plano radio-ángulo.

Tensores

Un uno-forma es una función escalar lineal de un vector, llamada también producto escalar, representada en notación de bra y ket:

$$\tilde{A}(\vec{B}) = \left\langle \tilde{A}, \vec{B} \right\rangle = A_0 B^0 + A_1 B^1 + ... = A_\mu B^\mu \tag{3}$$

hemos usado subíndices y superíndices para distinguir las componentes del uno-forma y del vector y el convenio de Einstein para índices repetidos. En el mismo sentido un vector es una función escalar lineal de un uno-forma

$$\vec{B}(\tilde{A}) = \left\langle \tilde{A}, \vec{B} \right\rangle \tag{4}$$

Al igual que un vector puede expandirse mediante el sumatorio de sus componentes en una determinada base $\{\vec{e}_\mu\}$, un uno-forma lo hace en su propia base $\{\tilde{e}^\nu\}$ también

$$\vec{A} = A^\mu \vec{e}_\mu \qquad ; \qquad \tilde{B} = B_\nu \tilde{e}^\nu \tag{5}$$

usamos estas combinaciones lineales para reescribir el producto escalar

$$\tilde{A}(\vec{B}) = \left\langle \tilde{A}, \vec{B} \right\rangle = \langle A_\mu \tilde{e}^\mu, B^\nu \vec{e}_\nu \rangle = A_\mu B^\nu \langle \tilde{e}^\mu, \vec{e}_\nu \rangle = A_\mu B^\mu \tag{6}$$

comprobando que los vectores de ambas bases deben cumplir la condición

$$\langle \tilde{e}^\mu, \vec{e}_\nu \rangle = \delta^\mu_{\ \nu} \tag{7}$$

Para saber cual es el producto escalar entre los uno-formas de la base desarrollamos el siguiente producto entre escalares, donde el segundo factor del primer miembro tiene el valor ρ^2

$$\begin{aligned} (\tilde{e}^\varphi \cdot \tilde{e}^\varphi) \cdot (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) &= \tilde{e}^\varphi \cdot (\tilde{e}^\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi = \tilde{e}^\varphi \cdot 1 \cdot \vec{e}_\varphi = 1 \\ (\tilde{e}^\varphi \cdot \tilde{e}^\varphi) \cdot \rho^2 &= 1 \end{aligned} \tag{8}$$

en cartesianas no hay cambios, pero en polares si

$$\begin{aligned} &\tilde{e}^x \cdot \tilde{e}^x = \tilde{e}^y \cdot \tilde{e}^y = 1 \ ; \ \tilde{e}^x \cdot \tilde{e}^y = 0 \\ &\tilde{e}^\rho \cdot \tilde{e}^\rho = 1 \ ; \ \tilde{e}^\varphi \cdot \tilde{e}^\varphi = \rho^{-2} \ ; \ \tilde{e}^\rho \cdot \tilde{e}^\varphi = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

estos dos espacios, el de los vectores y el de los uno-formas, que están relacionados entre si reciben el nombre de duales ya que cada vector del espacio vectorial tiene su imagen uno-forma en el espacio dual. De forma generalizada un tensor de rango (m, n) es una función escalar lineal de m uno-formas y n vectores, por lo que un uno-forma es un tensor de rango $(0, 1)$ y un vector es otro de rango $(1, 0)$. Pero ¿cómo se obtiene el producto escalar de dos vectores? la respuesta es mediante un tensor de rango $(0, 2)$, llamado tensor métrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) &= \left\langle \tilde{A}, \vec{B} \right\rangle = A_\nu B^\nu \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} = A^\mu \vec{e}_\mu B^\nu \vec{e}_\nu = A^\mu B^\nu \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = A_\nu B^\nu \end{aligned} \tag{10}$$

siendo las componentes del tensor métrico el producto escalar de los vectores de la base

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \tag{11}$$

y además este tensor tiene la propiedad de transformar las coordenadas de un vector en las de su dual uno-forma

$$A_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu \tag{12}$$

Ejercicio 4. *¿Cuales son las componentes del tensor métrico en cartesianas y en polares?*

Solución. Sustituimos en la ecuación (11) cada uno de los productos escalares de los vectores de las bases (ver ejercicio 2)

$$g_{xx} = g_{yy} = 1 \ ; \ g_{xy} = g_{yx} = 0$$
$$g_{\rho\rho} = 1 \ ; \ g_{\varphi\varphi} = \rho^2 \ ; \ g_{\rho\varphi} = g_{\varphi\rho} = 0$$

También existe el tensor métrico inverso $\mathbf{g}^{-1}$ de rango $(2, 0)$ y que tiene como argumentos a dos uno-formas

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{-1}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \left\langle \tilde{A}, \vec{B} \right\rangle = A_\nu B^\nu \\ &= \tilde{A} \cdot \tilde{B} = A_\mu \tilde{e}^\mu B_\nu \tilde{e}^\nu = A_\mu B_\nu \tilde{e}^\mu \cdot \tilde{e}^\nu = A_\nu B^\nu \end{aligned} \tag{13}$$

siendo las componentes del tensor métrico inverso el producto escalar de los uno-forma de la base

$$g^{\mu\nu} = \tilde{e}^\mu \cdot \tilde{e}^\nu \tag{14}$$

que transforman las coordenadas de un uno-forma en su vector dual

$$B^\nu = g^{\mu\nu} B_\mu \tag{15}$$

Ejercicio 5. *¿Cuales son las componentes del tensor métrico inverso en cartesianas y en polares?*

Solución. Sustituimos en la ecuación (14) cada uno de los productos escalares de los uno-forma de las bases (9)

$$g^{xx} = g^{yy} = 1 \ ; \ g^{xy} = g^{yx} = 0$$
$$g^{\rho\rho} = 1 \ ; \ g^{\varphi\varphi} = \rho^{-2} \ ; \ g^{\rho\varphi} = g^{\varphi\rho} = 0$$

ambos tensores son simétricos ante el cambio de orden de los subíndices o superíndices de sus componentes y estas son la inversa unas de otras

$$g_{\nu\kappa} B^\nu = B_\kappa = g_{\nu\kappa} g^{\mu\nu} B_\mu = \delta^\mu{}_\kappa B_\mu \tag{16}$$

Las componentes de un vector se pueden obtener de la aplicación del vector sobre cada uno de los uno-forma de la base dual

$$\vec{A}(\tilde{e}^\nu) = \langle \tilde{e}^\nu, A^\mu \vec{e}_\mu \rangle = A^\mu \langle \tilde{e}^\nu, \vec{e}_\mu \rangle = A^\mu \delta^\nu{}_\mu = A^\nu \tag{17}$$

al igual que las componentes de un uno-forma

$$\tilde{A}(\vec{e}_\nu) = \langle A_\mu \tilde{e}^\mu, \vec{e}_\nu \rangle = A_\mu \langle \tilde{e}^\mu, \vec{e}_\nu \rangle = A_\mu \delta^\mu{}_\nu = A_\nu \tag{18}$$

También se pueden obtener las componentes de un uno-forma al aplicar el tensor métrico sobre su imagen dual, el vector, y los vectores de la base dual

$$\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{e}_\mu) = A^\nu \vec{e}_\nu \cdot \vec{e}_\mu = A^\nu g_{\mu\nu} = A_\mu \tag{19}$$

y las componentes de un vector al aplicar el tensor métrico inverso sobre su imagen dual, el uno-forma, y los vectores de la base dual

$$\mathbf{g}(\tilde{A}, \tilde{e}_\mu) = A_\nu \tilde{e}^\nu \cdot \tilde{e}^\mu = A_\nu g^{\mu\nu} = A^\mu \tag{20}$$

Ejercicio 6. *¿Cual es el módulo, habiendo obtenido previamente las componentes del uno-forma dual, del vector expresado en coordenadas polares $\vec{A} \equiv (2\ m, 3\ rad)$?*

Solución. El módulo de un vector es la raíz cuadrada de su producto escalar y para ello obtendremos las componentes de su uno-forma dual mediante la ecuación (12)

$$\begin{aligned} A_\rho &= g_{\rho\rho}A^\rho + \cancel{g_{\rho\varphi}}A^\varphi = 2 \text{ m} \\ A_\varphi &= \cancel{g_{\varphi\rho}}A^\rho + g_{\varphi\varphi}A^\varphi = 2^2 \cdot 3 = 12 \text{ rad} \\ ||\vec{A}|| &= \sqrt{A_\mu A^\mu} = \sqrt{2 \cdot 2 + 3 \cdot 12} = \sqrt{40} = 6'3\ m \end{aligned}$$

Gradiente y derivada covariante

En coordenadas cartesianas los vectores y uno-formas de la base permanecen constantes en un desplazamiento además de ser iguales, por eso el operador gradiente aplicado a un campo escalar da lugar a otro vectorial

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \vec{e}_\mu \partial_\mu f = \vec{e}^\mu \partial_\mu f \tag{21}$$

sin embargo en coordenadas curvilíneas si que hay diferencia entre ellos y además pueden variar en un desplazamiento, al generalizar la anterior definición de gradiente se define la derivada covariante $\tilde{\nabla}$. Si expresamos la variación del campo escalar en cada una de las direcciones del sistema de coordenadas, comprobamos que aparecen las componentes de un uno-forma $\partial_\mu f$ y de un vector $\mathrm{d}x^\mu$

$$\mathrm{d}f = \partial_\mu f\ \mathrm{d}x^\mu = \partial_\mu f\ \mathrm{d}x^\mu = \partial_\mu f\ \tilde{e}^\mu \mathrm{d}x^\mu \vec{e}_\mu = \langle \tilde{\nabla} f, \mathrm{d}\vec{x} \rangle \tag{22}$$

el operador derivada covariante ha convertido un escalar, tensor de rango $(0, 0)$, en un tensor de rango $(0, 1)$, de forma generalizada la derivada covariante convierte un tensor de rango (m, n) en otro de rango $(m, n + 1)$ y tiene la forma

$$\tilde{\nabla} = \tilde{e}^\mu \partial_\mu \tag{23}$$

El resultado de aplicar la derivada covariante a un vector en coordenadas curvilíneas es el siguiente

$$\tilde{\nabla}\vec{A} = \tilde{e}^\mu \partial_\mu (A^\nu \vec{e}_\nu) = \tilde{e}^\mu (\partial_\mu (A^\nu)\vec{e}_\nu + \tilde{e}^\mu\ A^\nu (\partial_\mu \vec{e}_\nu) \tag{24}$$

podemos expresar la derivada de los vectores de la base como una combinación lineal de los mismos

$$\partial_\mu \vec{e}_\nu = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\ \vec{e}_\lambda \tag{25}$$

las componentes se conocen por el nombre de símbolos de Christoffel, que no son tensores de rango $(1, 2)$, porque si volvemos a reescribir la ecuación anterior para uno de los vectores de la base que indicaremos por 0

$$\partial_\mu \vec{e}_0 = \Gamma^\lambda{}_{\mu 0} \vec{e}_\lambda \tag{26}$$

muestra realmente que son tensores de rango $(1, 1)$. Incluimos los símbolos en la ecuación de la derivada covariante y renombramos los índices del segundo sumando

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}\vec{A} &= \tilde{e}^\mu (\partial_\mu A^\nu)\vec{e}_\nu + \tilde{e}^\mu\ A^\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\ \vec{e}_\lambda \\ &= \tilde{e}^\mu (\partial_\mu A^\nu)\vec{e}_\nu + \tilde{e}^\mu\ A^\lambda \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\ \vec{e}_\nu \\ &= (\partial_\mu A^\nu + A^\lambda \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda})\tilde{e}^\mu \vec{e}_\nu \end{aligned} \tag{27}$$

se pone de manifiesto el efecto sobre el rango del tensor que tiene la aplicación de la derivada covariante, transforma el vector, un tensor de rango $(1,0)$, en un tensor de rango $(1,1)$, porque el resultado obtenido es una combinación lineal de los vectores de ambas bases duales $\{\tilde{e}^\mu\}$ y $\{\vec{e}_\nu\}$. Las componentes μ del nuevo tensor correspondientes a las ν componentes del vector son

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu A^\nu + A^\lambda \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} \tag{28}$$

Ejercicio 7. *¿Cuales son los valores de los símbolos de Christoffel en polares?*

Solución. Derivamos con respecto a ρ y φ los vectores de la base en coordenadas polares teniendo en cuenta que son función de ambas variables, como se muestra en la matriz transformación (ver ejercicio 1). En la primera de las derivadas se aprecia que son nulas las componentes radial y angular, en la segunda y tercera solo hay componente angular y en la cuarta la única componente es la radial:

$$\begin{aligned}
\partial_\rho\ \vec{e}_\rho = 0 &\longrightarrow \Gamma^\rho{}_{\rho\rho} = \Gamma^\varphi{}_{\rho\rho} = 0 \\
\partial_\rho\ \vec{e}_\varphi = \rho^{-1}\vec{e}_\varphi &\longrightarrow \Gamma^\rho{}_{\rho\varphi} = 0\ ;\ \Gamma^\varphi{}_{\rho\varphi} = \rho^{-1} \\
\partial_\varphi\ \vec{e}_\rho = \rho^{-1}\vec{e}_\varphi &\longrightarrow \Gamma^\rho{}_{\varphi\rho} = 0\ ;\ \Gamma^\varphi{}_{\varphi\rho} = \rho^{-1} \\
\partial_\varphi\ \vec{e}_\varphi = -\rho\ \vec{e}_\rho &\longrightarrow \Gamma^\rho{}_{\varphi\varphi} = -\rho\ ;\ \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} = 0
\end{aligned}$$

Si aplicamos la derivada covariante a un uno-forma en coordenadas curvilíneas obtenemos

$$\tilde{\nabla}\tilde{A} = \tilde{e}^\mu \partial_\mu (A_\nu \tilde{e}^\nu) = \tilde{e}^\mu (\partial_\mu A_\nu)\tilde{e}^\nu + \tilde{e}^\mu\ A_\nu (\partial_\mu \tilde{e}^\nu) \tag{29}$$

y expresamos la derivada del uno-forma de la base como una combinación lineal de los mismos

$$\partial_\mu \tilde{e}^\nu = \Pi^\nu{}_{\mu\lambda}\ \tilde{e}^\lambda \tag{30}$$

para saber cómo están relacionadas las componentes Π con las Γ se aplica la derivada al producto escalar de los uno-forma y vectores de las bases, que por ser escalares es nulo

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \langle \tilde{e}^\nu, \vec{e}_\lambda \rangle &= \Pi^\nu{}_{\mu\kappa} \langle \tilde{e}^\kappa, \vec{e}_\lambda \rangle + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} \langle \tilde{e}^\nu, \vec{e}_\kappa \rangle \\
&= \Pi^\nu{}_{\mu\kappa}\delta^\kappa_\lambda + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\delta^\nu_\kappa = \Pi^\nu{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = 0
\end{aligned} \tag{31}$$

cuyo resultado es

$$\Pi^\nu{}_{\mu\lambda} = -\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = 0 \tag{32}$$

de forma que la derivada covariante de un un uno-forma y las componentes del nuevo tensor de rango $(0,2)$ son

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}\tilde{A} &= (\partial_\mu A_\nu - A_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})\tilde{e}^\mu \tilde{e}^\nu \\
\nabla_\mu A_\nu &= \partial_\mu A_\nu - A_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{33}$$

Ejercicio 8. *¿Cual es el campo tensorial obtenido de la aplicación de la derivada covariante al campo escalar $f = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$? ¿Cual es la derivada covariante del nuevo campo tensorial en el punto $\rho = 3$ m y $\varphi = 2$ rad?*

Solución. Aplicamos el operador (23) de la derivada covariante al campo escalar

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla} f &= \tilde{e}^{\mu}\partial_{\mu} f = \tilde{e}^{\rho}\partial_{\rho} f + \tilde{e}^{\varphi}\partial_{\varphi} f \\ &= 2\rho \operatorname{sen}\varphi \tilde{e}^{\rho} + \rho^2 \cos\varphi \tilde{e}^{\varphi}\end{aligned}$$

el resultado es un nuevo tensor $\tilde{A}$ de rango $(0, 1)$, un uno-forma con dos componentes por estar en un espacio bidimensional. La derivada covariante aplicada a $\tilde{A}$ da lugar a otro tensor de rango $(0, 2)$ de cuatro componentes, para ello aplicamos la ecuación (33) y usamos los valores de los símbolos de Christoffel en coordenadas polares

$$\begin{aligned}\nabla_{\rho} A_{\rho} &= \partial_{\rho} A_{\rho} - A_{\rho}\cancel{\Gamma^{\rho}{}_{\rho\rho}} - A_{\varphi}\cancel{\Gamma^{\varphi}{}_{\rho\rho}} \\ &= 2\operatorname{sen}\varphi \\ \nabla_{\varphi} A_{\rho} &= \partial_{\varphi} A_{\rho} - A_{\rho}\cancel{\Gamma^{\rho}{}_{\varphi\rho}} - A_{\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\rho} \\ &= 2\rho\cos\varphi - \rho^2\cos\varphi\rho^{-1} = \rho\cos\varphi \\ \nabla_{\rho} A_{\varphi} &= \partial_{\rho} A_{\varphi} - A_{\rho}\cancel{\Gamma^{\rho}{}_{\rho\varphi}} - A_{\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\rho\varphi} \\ &= 2\rho\cos\varphi - \rho^2\cos\varphi\rho^{-1} = \rho\cos\varphi \\ \nabla_{\varphi} A_{\varphi} &= \partial_{\varphi} A_{\varphi} - A_{\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\varphi\varphi} - A_{\varphi}\cancel{\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\varphi}} \\ &= -\rho^2\operatorname{sen}\varphi - 2\rho\operatorname{sen}\varphi(-\rho) = \rho^2\operatorname{sen}\varphi\end{aligned}$$

expresamos el resultado en forma matricial

$$\begin{pmatrix}\nabla_{\rho} \\ \nabla_{\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{\rho} & A_{\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \rho^2\operatorname{sen}\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1'8 & -1'2 \\ -1'2 & 8'2\end{pmatrix}$$

Derivada direccional, transporte paralelo y geodésicas

Dado un campo escalar f y una curva parametrizada (elegimos como parámetro el tiempo propio) cuyo vector tangente en cada punto es

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mu} \tag{34}$$

se define la derivada direccional como la variación que experimenta el campo a lo largo de la curva

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \partial_{\mu} f \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t} = \left\langle \tilde{\nabla} f, \vec{V} \right\rangle = \nabla_V f \tag{35}$$

La derivada direccional de un vector, o de un uno-forma, incluye los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &= \nabla_{\mu} A^{\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t} = \left\langle \tilde{\nabla}\vec{A}, \vec{V} \right\rangle = \nabla_V \vec{A} = \frac{\mathrm{D}A^{\mu}}{\mathrm{D}t}\vec{e}_{\mu} \\ &= V^{\mu}(\partial_{\mu} A^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}A^{\lambda})\vec{e}_{\nu} = \left(\frac{\mathrm{d}A^{\nu}}{\mathrm{d}t} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}A^{\lambda}V^{\mu}\right)\vec{e}_{\nu}\end{aligned} \tag{36}$$

Ejercicio 9. *Dada la curva parametrizada $\rho = at$ y $\varphi = bt^2$, donde a y b son constantes, y el campo escalar $f = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$, ¿cual es el valor de la derivada direccional en el instante 2 s?*

Solución. En primer lugar obtenemos el vector tangente a la curva

$$\vec{V} = a\ \vec{e}_\rho + 2bt\ \vec{e}_\varphi$$

a continuación la derivada covariante del campo escalar, que coincide con la derivada parcial

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla} f &= 2\rho \operatorname{sen}\varphi\ \tilde{e}^\rho + \rho^2 \cos\varphi\ \tilde{e}^\varphi \\ &= (2at \operatorname{sen} bt^2)\tilde{e}^\rho + (a^2t^2 \cos bt^2)\tilde{e}^\varphi\end{aligned}$$

con los que calculamos el producto escalar

$$\left\langle \tilde{\nabla} f, \vec{V} \right\rangle = 2\ a^2 t\ \ \operatorname{sen} bt^2 + 2\ ba^2t^3\ \ \cos bt^2 = 4\ a^2 \operatorname{sen} 4b + 16\ ba^2 \cos 4b$$

el mismo resultado al que hubiéramos llegado derivando f con respecto a t, sustituyendo las funciones temporales del radio y ángulo expresadas por la curva.

Si la derivada direccional de un vector, o uno-forma, es nula se dice que el vector ha experimentado un transporte paralelo a lo largo de cada uno de los puntos de la trayectoria

$$\frac{\mathrm{D}A^\mu}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}A^\nu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} A^\lambda V^\mu = 0 \tag{37}$$

Cuando el vector transportado paralelamente es el propio vector tangente de la curva se dice que recorre una geodésica

$$\frac{\mathrm{d}V^\nu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda V^\mu = 0 \tag{38}$$

Ejercicio 10. *Dada la superficie (paraboloide) parametrizada $\vec{r}(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi\vec{e}_x +$ $\rho \operatorname{sen}\varphi\vec{e}_y + a\rho^2\vec{e}_z$, ¿cual es la métrica y los símbolos de Christoffel en coordenadas polares, siendo a una constante? Un vector unidad que apunta inicialmente paralelo a $\vec{e}_\varphi$ es transportado paralelo a la curva dada por $\rho = R$, $\varphi = 2\pi t$ para $0 \leq t \leq 1$. ¿Cual es el ángulo entre el vector transportado cuando $t = 0$ y $t = 1$?*

Solución. Obtenemos los vectores de la base en polares

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos\varphi\vec{e}_x + \operatorname{sen}\varphi\vec{e}_y + 2a\rho\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\rho\operatorname{sen}\varphi\vec{e}_x + \rho\cos\varphi\vec{e}_y\end{aligned}$$

y con ellos los valores del tensor métrico y la métrica en dicha superficie

$$\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\rho = 1 + 4a^2\rho^2\ ; \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi = \rho^2\ ;\ \vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\varphi = 0$$
$$\mathrm{d}s^2 = (1 + 4a^2\rho^2)\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2$$

y las siguientes derivadas parciales

$$\begin{aligned}&\partial_\rho\vec{e}_\rho = 2a\vec{e}_z \\ &\partial_\rho\vec{e}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y = \rho^{-1}\vec{e}_\varphi \\ &\partial_\varphi\vec{e}_\rho = -\operatorname{sen}\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y = \rho^{-1}\vec{e}_\varphi \\ &\partial_\varphi\vec{e}_\varphi = -\rho\cos\varphi\vec{e}_x - \rho\operatorname{sen}\varphi\vec{e}_y = -\rho\vec{e}_\rho + 2a\rho^2\vec{e}_z\end{aligned}$$

los vectores $\partial_\rho \vec{e}_\rho$ y $\partial_\varphi \vec{e}_\varphi$ son ortogonales, aislamos el término $\vec{e}_z$ de la cuarta ecuación y la multiplicamos escalarmente con la primera

$$\partial_\rho \vec{e}_\rho (\partial_\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \vec{e}_\rho) = 4a^2\rho^2$$
$$\cancel{\partial_\rho \vec{e}_\rho \cdot \partial_\varphi \vec{e}_\varphi} + \rho \vec{e}_\rho \partial_\rho \vec{e}_\rho = 4a^2\rho^2$$

multiplicamos ambos miembros por $\vec{e}_\rho$

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho \partial_\rho \vec{e}_\rho = 4a^2\rho \vec{e}_\rho$$
$$\partial_\rho \vec{e}_\rho = \frac{4a^2\rho}{1+4a^2\rho^2}\vec{e}_\rho \; ; \; \partial_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{-\rho}{1+4a^2\rho^2}\vec{e}_\rho$$

y ahora deducimos los símbolos de Christoffel con la ecuación (25)

$$\partial_\rho \vec{e}_\rho = \Gamma^\rho{}_{\rho\rho}\vec{e}_\rho + \Gamma^\varphi{}_{\rho\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{4a^2\rho}{1+4a^2\rho^2}\vec{e}_\rho$$
$$\partial_\rho \vec{e}_\varphi = \Gamma^\rho{}_{\rho\varphi}\vec{e}_\rho + \Gamma^\varphi{}_{\rho\varphi}\vec{e}_\varphi = \rho^{-1}\vec{e}_\varphi$$
$$\partial_\varphi \vec{e}_\rho = \Gamma^\rho{}_{\varphi\rho}\vec{e}_\rho + \Gamma^\varphi{}_{\varphi\rho}\vec{e}_\varphi = \rho^{-1}\vec{e}_\varphi$$
$$\partial_\varphi \vec{e}_\varphi = \Gamma^\rho{}_{\varphi\varphi}\vec{e}_\rho + \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi}\vec{e}_\varphi = \frac{-\rho}{1+4a^2\rho^2}\vec{e}_\rho$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho{}_{\rho\rho} &= \frac{4a^2\rho}{1+4a^2\rho^2} & \Gamma^\varphi{}_{\rho\rho} &= 0 \\ \Gamma^\rho{}_{\rho\varphi} &= 0 & \Gamma^\varphi{}_{\rho\varphi} &= \rho^{-1} \\ \Gamma^\rho{}_{\varphi\rho} &= 0 & \Gamma^\varphi{}_{\varphi\rho} &= \rho^{-1} \\ \Gamma^\rho{}_{\varphi\varphi} &= \frac{-\rho}{1+4a^2\rho^2} & \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Para saber como varían las componentes de un vector $\vec{A}$ al experimentar el transporte paralelo sobre la superficie dada a lo largo de la curva especificada, cuyas componentes de la tangente son $V^\rho = 0$ y $V^\varphi = 2\pi$, aplicamos la ecuación (36)

$$\frac{\mathrm{d}A^\rho}{\mathrm{d}t} - \frac{2\pi R}{1+4a^2R^2}A^\varphi = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}A^\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{2\pi}{R}A^\rho = 0$$

derivamos con respecto a t la primera de ellas y usamos la segunda

$$\frac{\mathrm{d}^2A^\rho}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4\pi^2}{1+4a^2R^2}A^\rho = 0$$

siendo la solución a esta ecuación diferencial

$$A^\rho = c_1 \cos 2\pi bt + c_2 \operatorname{sen} 2\pi bt$$

donde hemos llamdo $b = (1+4a^2R^2)^{-\frac{1}{2}}$, la condición impuesta en el instante $t = 0$ determina que la componente radial del vector $\vec{A}$ es nula, requiere que $c_1 = 0$ y podemos escribir la solución de la componente angular

$$A^\varphi = \frac{-c_2}{bR}\cos 2\pi bt$$

como en $t = 1$ la componente radial es la unidad, la segunda constante toma el valor $c_2 = -bR$. Ya podemos escribir el vector, y su uno-forma dual usando la métrica, en cualquier instante como en los instantes inicial y final tiene las siguientes componentes,

$$\begin{gathered}
\vec{A}(t) \equiv (-bR \operatorname{sen} 2\pi bt, \cos 2\pi bt) \\
\tilde{A}(t) \equiv (-b^{-1} R \operatorname{sen} 2\pi bt, R^2 \cos 2\pi bt) \\
\vec{A}(t=0) \equiv (0, 1) \\
\tilde{A}(t=0) \equiv (0, R^2) \\
\vec{A}(t=1) \equiv (-bR \operatorname{sen} 2\pi b, \cos 2\pi b) \\
\tilde{A}(t=1) \equiv (-b^{-1} R \operatorname{sen} 2\pi b, R^2 \cos 2\pi b)
\end{gathered}$$

con los que calculamos el producto escalar del vector en los instantes inicial y final y el módulo de ambos para obtener el ángulo que forman

$$\begin{aligned}
\alpha = \arccos \frac{\left\langle \tilde{A}(t=0), \vec{A}(t=1) \right\rangle}{\|\tilde{A}(t=0)\| \|\vec{A}(t=1)\|} = \\
= \frac{R^2 \cos 2\pi b}{R\ R} = 2\pi b = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 4a^2 R^2}}
\end{aligned}$$

si el radio tiende a cero el ańgulo es de 2π radianes, el vector ha hecho una rotación completa debido a que el plano tangente ha girado perpendicular al eje de rotación, mientras que si el radio tiende a infinito el ángulo tiende a cero puesto que el plano tangente gira paralelo al eje de rotación.