Resumen

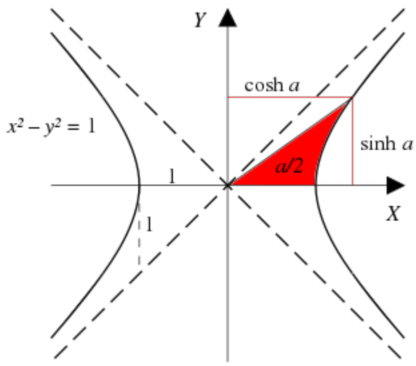
La relación entre la función exponencial con argumento complejo y las funciones trigonométricas permiten definir las funciones hiperbólicas y el argumento de las mismas.

Las funciones hiperbólicas se definen usando una hipérbola, mientras que las funciones trigonométricas usan el círculo. Los puntos (x, y) de la hipérbola unidad $x^2 - y^2 = 1$ son especificados por $(\cosh\beta, \sinh\beta)$,donde β es un «ángulo hiperbólico». Los puntos del círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$ son especificados por $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, donde α es el ángulo ordinario.
De las propias definiciones se deducen las siguientes relaciones

$$\cosh^2\beta - \sinh^2\beta = 1 \tag{1}$$
$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \tag{2}$$

El ángulo ordinario, en radianes, coincide con el doble del área del sector circular abarcado

$$\text{Área sector circular} = \frac{\alpha}{2\pi}(\pi 1^2) = \frac{\alpha}{2}$$



La misma relación existe entre el área del sector hiperbólico y el ángulo hiperbólico, aunque su demostración la haremos mas adelante, obtenemos primero el área basándonos en la figura

$$\text{Área sector hiperbólico} = \frac{x\cdot y}{2} - \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x\cdot y}{2}$$
$$-\left(-\frac{\ln\left(\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|\right) - x\sqrt{x^2-1}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|$$

por lo que el ángulo hiperbólico de la hipérbola unidad es

$$\beta = \ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right| = \ln|y+x|$$

La fórmula de Euler (3) relaciona la función exponencial compleja con las funciones trigonométricas

$$e^{iu} = \cos u + i\operatorname{sen} u \tag{3}$$
$$e^{-iu} = \cos(-u) + i\operatorname{sen}(-u) = \cos u - i\operatorname{sen} u \tag{4}$$
$$\cos u = \frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2} \tag{5}$$
$$\operatorname{sen} u = \frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i} \tag{6}$$

en el caso de que el argumento de las funciones trigonométricas sea un complejo $u = iw$

$$\cos iw = \frac{e^{-w} + e^{w}}{2} = \cosh w \tag{7}$$

$$\operatorname{sen} iw = \frac{e^{-w} - e^{w}}{2i} = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2} i = i \sinh w \tag{8}$$

definen las funciones hiperbólicas seno y coseno, así como sus derivadas

$$\cosh w = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2} \;;\; \sinh w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2} \tag{9}$$

$$e^{w} = \cosh w + \sinh w \;;\; e^{-w} = \cosh w - \sinh w \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \cosh w = \sinh w \;:\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \sinh w = \cosh w \tag{11}$$

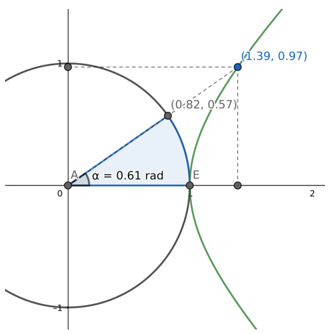
Con ellas confirmamos que el ángulo hiperbólico es igual al doble del área del sector hiperbólico

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{\cosh w \cdot \sinh w}{2} - \int \sinh w \; \mathrm{d}(\cosh w) \\ &= \frac{1}{8}(e^{2w} - e^{-2w}) - \int \left(\frac{e^{w} - e^{-w}}{2} \right)^2 \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{8}(e^{2w} - e^{-2w}) - \left| \frac{e^{2w}}{8} - \frac{w}{2} + \frac{e^{-2w}}{8} \right|_0^w = \frac{w}{2} \end{aligned}$$

Ejercicios

Los dos primeros ejercicios ponen de manifiesto que los argumentos de las funciones trigonométricas y de las hiperbólicas son diferentes, aunque coinciden en ser el doble del sector circular e hiperbólico que establecen. El área de un sector circular en el círculo unidad abarca el rango $[0, \pi]$ por lo que el argumento de las funciones trigonométricas toma valores en el rango $[0, 2\pi]$. Por otro lado el área del sector hiperbólico en la hipérbola unidad y el eje horizontal abarca el intervalo $[0, +\infty]$ al presentar una asíntota, por lo que el argumento de las funciones hiperbólicas toma valores en el mismo rango.

El tercero relaciona la rapidez con la tangente hiperbólica del ángulo de rotación de la transformación de Lorentz de la relatividad especial.



Ejercicio 1. *Sea el punto z cuyas coordenadas en el plano complejo son $(1,39, 0,97)$, podemos usar la fórmula de Euler para transformar las coordenadas cartesianas en polares, teniendo en cuenta que al encontrarse en el círculo unidad tenemos que $r = 1$.*

Solución. Cualquier número complejo puede ser representado en el plano complejo mediante la expresión en coordenadas cartesianas siguiente

$$z = r\cos\alpha + ir\,\mathrm{sen}\,\alpha = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = re^{i\alpha}$$

en este caso concreto $r = 1$, $\alpha = 0,61$, $r\cos\alpha = 0,82$ y $r\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0,57$

$$z = 0,82 + i0,57 = e^{i0,61}$$

Ejercicio 2. *En la figura se indica el punto* $(1,39, 0,97)$ *perteneciente a la hipérbola unidad* $x^2 - y^2 = 1$*, ¿cual es el ángulo hiperbólico?*

Solución. Al pertenecer a la hipérbola unidad la coordenada horizontal coincide con el $\cosh\alpha$ mientras que la vertical con el $\sinh\alpha$, usamos la primera de las ecuaciones (10)

$$e^{\beta} = \cosh\beta + \sinh\beta = 1,39 + 0,97 = 2,36$$
$$\beta = \ln 2,36 \approx 0,86$$

Ejercicio 3. *En el espacio de Minkowski se representan los puntos del universo que recorre un objeto con velocidad* v *a lo largo del eje horizontal* x *y del tiempo en el eje vertical* ict*. ¿Cual es la relación entre los intervalos temporal y espacial con las funciones trigonométricas?*

Solución. En relatividad especial el elemento de línea o línea del universo establece la distancia entre dos sucesos $\mathrm{d}s$ separados por los intervalos temporal $\mathrm{d}t$ y espacial $\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$

siendo el tiempo propio τ asociado al propio sistema de referencia del objeto en movimiento, para el que $\mathrm{d}x = 0$

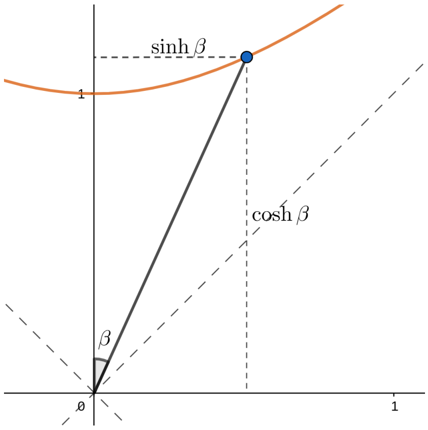
$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2$$

que permite reescribir el elemento de línea

$$-c^2\mathrm{d}\tau^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$
$$1 = \frac{c^2\mathrm{d}t^2}{c^2\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x^2}{c^2\mathrm{d}\tau^2}$$

vemos que se trata de la ecuación de una hipérbola unidad centrada en el eje vertical que al ser comparada con la ecuación (1) deducimos que

$$\cosh^2\beta = \frac{c^2\mathrm{d}t^2}{c^2\mathrm{d}\tau^2}\ ;\ \cosh\beta = \frac{c\mathrm{d}t}{c\mathrm{d}\tau}$$
$$\sinh^2\beta = \frac{\mathrm{d}x^2}{c^2\mathrm{d}\tau^2}\ ;\ \sinh\beta = \frac{\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}\tau}$$
$$\tanh^2\beta = \frac{\mathrm{d}x^2}{c^2\mathrm{d}t^2} = \frac{v^2}{c^2}\ ;\ \tanh\beta = \frac{v}{c}$$



donde v/c es la rapidez (*rapidity*) que para $v \ll c$ coincide con el ángulo hiperbólico

$$\beta = \operatorname{arctanh}\frac{v}{c} \overset{v \ll c}{\approx} \frac{v}{c}$$