1. Serie de Fourier

Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica $f(x)$ en una suma infinita de senos y cosenos. La serie de Fourier hace uso de las relaciones de ortogonalidad de las funciones seno y coseno. La computación y estudio de la serie de Fourier es conocida como análisis asrmónico y extremadamente útil como una forma de dividir en un conjunto de términos simples que pueden conectados, individualmente resueltos y entonces recombinados para obtener la solución del problema original o una aproximación al mismo con la aproximación deseada.

La computación de la serie de Fourier se basa en las identidades integrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\ \text{sen}(nx)\ \mathrm{d}x = \pi\delta_{mn}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ \cos(nx)\ \mathrm{d}x = \pi\delta_{mn}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\ \cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\ \mathrm{d}x = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0$$

para $m, n \neq 0$, donde δ_{mn} es la delta de Kronecker.

Usando el método para una serie generalizada de Fourier, la serie usual de Fourier que incluye senos y cosenos se obtiene tomando $f_1(x) = \cos x$ y $f_2(x) = \text{sen} x$. Debido a que estas funciones forman un sistema completo ortogonal en el dominio $[-\pi, \pi]$, la serie de Fourier de una función $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx)$$

donde hemos separado el coeficiente de $n = 0$ para que los segundos sumandos fueran simétricos. Si multiplicamos ambos miembros por $\text{sen}(mx)$ e integramos entre $[-\pi, \pi]$ obtenemos los coeficientes a_0 y a_n, y si repetimos la operación pero multiplicando por $\text{sen}(mx)$ obtenemos los coeficientes b_n con $n = 1, 2, 3, ...$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\ \mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(nx)\ \mathrm{d}x$$

Si la función $f(x)$ es periódica en el intervalo $[-L, L]$ en vez de $[-\pi, \pi]$, usamos un simple cambio de variables para transformar el intervalo de integración

$$x = \frac{\pi x'}{L} \tag{1}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{\pi \mathrm{d}x'}{L} \tag{2}$$

Sustituimos x por x' y $\mathrm{d}x$ por $\mathrm{d}x'$

$$f(x') = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)$$

Donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x')\mathrm{d}x' \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x')\cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)\mathrm{d}x' \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x')\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)\mathrm{d}x' \end{aligned}$$

Si la periodicidad recae en el intervalo $[0, 2L]$ en las expresiones anteriores solo cambian los límites de la integral, por que en general para una función $f(x)$ periódica en el intervalo $2L$ puede usarse cualquier intervalo $[x_0, x_0 + 2L]$ donde x_0 se elige de forma conveniente.

La noción de una serie de Fourier pueden ser también aplicada a **coeficientes complejos**. Consideramos una función de valor real $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}$$

Multiplicamos ambos miembros por e^{-imx} e integramos en el dominio de x que es $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}\right)e^{-imx}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(n-m)x] + i\mathrm{sen}[(n-m)x]\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n 2\pi\delta_{mn} \\ &= 2\pi A_m, \end{aligned}$$

donde

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Para el intervalo $[-L/2, L/2]$ se convierte en

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\frac{2\pi nx}{L}} \\ A_n &= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{L}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. Transformada de Fourier

Estas ecuaciones son la base para la **transformada de Fourier**, que se obtiene al transformar A_n de una variable discreta a otra continua, si tomamos $L \to \infty$ e introducimos una nueva variable $n/L \to k$ y reemplazamos los términos discretos A_n por continuos $F(k)\ \mathrm{d}k$

$$f(x) = \mathcal{F}_k^{-1}[F(k)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\ e^{i2\pi kx}\mathrm{d}k$$
$$F(k) = \mathcal{F}_x[f(x)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i2\pi kx}\mathrm{d}x$$

si elegimos una nueva variable $2\pi k = p$, la transformada pierde la simetría

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(p)\ e^{ipx}\ \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}$$
$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-ipx}\ \mathrm{d}x$$

3. La δ de Dirac

Formalmente la función δ es una función lineal de un espacio de funciones de prueba f. La acción de δ en f, escrito como $\delta[f]$ o $\langle \delta, f \rangle$, da un valor en 0 de f para cualquier función de f. Tiene la siguiente propiedad fundamental

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-a)\ \mathrm{d}x = f(a)$$

y de hecho

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\ \delta(x-a)\ \mathrm{d}x = f(a)$$

para $\epsilon > 0$ y $\delta(x-a) = 0$ para todo $x \neq a$.

De una forma generalizada la función δ de una función de x viene dada por

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

donde x_i son las raíces de g.

La función δ de una función como $g(x) = x^4 - 16$ que tiene dos raíces $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ y su derivada es $g'(x) = 4x^3$ es

$$\delta[g(x)] = \frac{\delta(x+2)}{32} + \frac{\delta(x-2)}{32}$$

Una expansión de la función $\delta(x-a)$ en serie de Fourier tiene los siguientes coeficientes

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-a)\ \cos(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cos(na)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-a)\ \mathrm{sen}(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\mathrm{sen}(na)$$

de forma que

$$\begin{aligned}\delta(x-a) =& \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\cos(na)\cos(nx) + \operatorname{sen}(na)\operatorname{sen}(nx)]\\ =& \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos[n(x-a)]\end{aligned}$$

La transformada de Fourier de la función δ es

$$\delta(x) = \mathcal{F}_k[1](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx}\ \mathrm{d}k$$

y su inversa

$$\mathcal{F}_x^{-1}[\delta(x)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ e^{-2\pi ikx}\ \mathrm{d}x = 1$$

haciendo el cambio de variable $2\pi k = p$

$$\begin{aligned}\delta(x) = \mathcal{F}_k[1](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ipx}\ \mathrm{d}p\\ \mathcal{F}_x^{-1}[\delta(x)](p) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ e^{-ipx}\ \mathrm{d}x = 1\end{aligned}$$

La función δ también puede definirse como los siguientes límites con $\epsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\delta(x) =& \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\epsilon|x|^{\epsilon-1}\\ =& \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}}e^{-x^2/4\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi x}\operatorname{sen}\frac{x}{\epsilon}\end{aligned}$$

y también con $n \to \infty$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}[(n+\frac{1}{2})x]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}$$

En coordenadas cartesianas en dos dimensiones la función δ se define así

$$\delta^2(x,y) = \begin{cases}0 & x^2+y^2 \neq 0\\ \infty & x^2+y^2 = 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta^2(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 1$$

$$\delta^2(ax,by) = \frac{1}{|ab|}\delta^2(x,y)$$

y

$$\delta^2(x,y) = \delta(x)\delta(y)$$

4. Transformada de Fourier y delta de Dirac en la ecuación de Schrödinger

La función de onda $\Psi(x)$, en el instante $t = t_0$, puede escribirse como una superposición de ondas planas multiplicada por una función dependiente del número de onda $\Phi(k)$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\ \Phi(k)\ e^{ikx}$$

que podemos escribir mediante la transformada de Fourier

$$\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \Psi(x) \; e^{-ikx}$$

Sustituimos la segunda ecuación en la primera pero para una posición diferente x'

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \; \Psi(x') \; e^{-ikx'} \; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; e^{ikx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \; \Psi(x') \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; e^{ik(x-x')} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \; \Psi(x') \; \delta(x-x') = \Psi(x)
\end{aligned}$$

donde hemos identificado la delta de Dirac como

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; e^{ik(x-x')}$$

Como el número de onda está relacionado con el momento mediante la expresión $p = \hbar k$ podemos hacer el cambio de variable de los coeficientes de la serie de Fourier a $\tilde{\Phi}(p)$ teniendo en cuenta que $\mathrm{d}x = \mathrm{d}p/\hbar$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{\hbar} \; \tilde{\Phi}(p) \; e^{ipx/\hbar}$$

$$\tilde{\Phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \Psi(x) \; e^{-ipx/\hbar}$$

como se ha perdido la simetría hacemos el siguiente ajuste $\tilde{\Phi}(p) \to \Phi(p)\sqrt{\hbar}$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \; \Phi(p) \; e^{ipx/\hbar}$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \Psi(x) \; e^{-ipx/\hbar}$$