Introducción

El sistema internacional SI de unidades basado en el kilogramo, metro y segundo es un inconveniente para realizar cálculos que involucran masa de estrellas o tamaño de galaxias. Trabajos de investigación sobre gravedad cuántica expresan la masa, longitud y tiempo en términos de energía, expresados como potencias de la unidad GeV. Las unidades geometrizadas que son expresadas en términos de longitud, son usadas con preferencia en relatividad general. (Este resumen está basado en el texto del mismo título de ALAN L. MYERS).

Sistema internacional de unidades

El SI se basa en las unidades $kg - m - s$ por esto es llamado también MKS, y todas las ecuaciones deben tener consistencia respecto de sus unidades.
Si cogemos como ejemplo la ecuación fundamental de la dinámica $F = m{\cdot}a$, las dimensiones de la magnitud fuerza son $[F] = M\ L\ T^{-2}$ y la ecuación de la ley de gravitación universal $F = G\ m_1\ m_2\ /r^2$ donde G es una constante universal que relaciona la fuerza con las masas y el inverso del cuadrado de su distancia, se deduce que las dimensiones de esta constante son $[G] = M^{-1}\ L^3\ T^{-2}$. Esta constante fue obtenida experimentalmente por Cavendish, cincuenta años después de la muerte de Newton, $G = 6{,}6743\ 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$.
Si cogemos las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\ g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\ \pi\ G}{c^4}\ T_{\mu\nu} \tag{1}$$

donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico que es adimensional, $R_{\mu\nu}$ las componentes del tensor de Ricci (obtenido de la contracción del primer y tercer índices del tensor de curvatura de Riemann $R_{\rho\mu\lambda\nu}$) que está relacionado con la segunda derivada espacial del tensor métrico y por tanto viene expresado en m^{-2} igual que R que es el escalar de Ricci, Λ esla constante cosmológica expresada en m^{-2} y finalmente $T_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor densidad de energía expresado en $J\ m^{-3} = kg\ m^{-1}\ s^{-2}$. La consistencia de las unidades es aportada por las constantes universales G y c la velocidad de la luz, G/c^4 viene expresada en unidades $kg^{-1}\ m^{-1}\ s^2$.

Unidades naturales

Son usadas exclusivamente en cosmología y relatividad general, se basan en tomar como unidad las siguientes constantes universales:

$$c = \hbar = \epsilon_0 = k_B = 1 \tag{2}$$

Los valores de estas constantes en unidades del SI son:

velocidad de la luz	c	$2{,}9979\ 10^8\ m\ s^{-1}$
constante de Planck reducida	$\hbar$	$1{,}0546\ 10^{-34}\ J\ s$
constante eléctrica	ϵ_0	$8{,}8542\ 10^{-12}\ A^2 s^4 kg^{-1} m^{-3}$
constante de Boltzman	k_B	$1{,}3806\ 10^{-23}\ J\ K^{-1}$

Se selecciona como magnitud de referencia la energía expresada habitualmente en GeV cuya equivalencia en el SI es 1 $GeV = 1{,}6022\ 10^{-10}\ J$, y el resto de magnitudes tendrán como unidad una potencia de $GeV^{\alpha-\beta-\gamma}$ que depende de las potencias de sus unidades respectivas en el SI $kg^{\alpha} m^{\beta} s^{\gamma}$. El factor de conversión al SI será $\hbar^{\beta+\gamma} c^{\beta-2\alpha}$.

¿Cual es la unidad natural del tiempo y el factor de conversión al SI?

Sabemos que su unidad en el SI es el s que está relacionado con la inversa de la energía por la ecuación $E = \hbar\nu = \nu$. El segundo expresado en MKS se ajusta a $kg^0 m^0 s^1$ es decir $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 1$ y por tanto su unidad natural es la potencia de la energía GeV^{0-0-1}, es decir el tiempo en unidades naturales se expresa en GeV^{-1}. Si queremos convertir un tiempo expresado en unidades naturales al SI, el factor de conversión será $\hbar^{0+1} c^{0-2\cdot 0} = \hbar$, esto significa que un tiempo de 1 GeV^{-1} equivale a $(1{,}6022\ 10^{-10})^{-1} \cdot 1{,}0546\ 10^{-34} = 6,5820\ 10^{-25}\ s$.

¿Cual es la unidad natural de la fuerza y el factor de conversión al SI?

El newton es la unidad internacional de la fuerza, expresada en MKS equivale a $kg^1 m^1 s^{-2}$ de donde obtenemos que $\alpha = 1$, $\beta = 1$ y $\gamma = -2$, siendo la potencia de la energía $GeV^{1-1-(-2)}$ por lo tanto su unidad natural es GeV^2. El factor de conversión es $\hbar^{1+(-2)} c^{1-2\cdot 1} = (\hbar\ c)^{-1}$. Una fuerza de 1 GeV^2 equivale a $(1{,}6022\ 10^{-10})^2 (1{,}0546\ 10^{-34} \cdot 2{,}9979\ 10^8)^{-1} = 8{,}1196\ 10^5\ N$.

Siguiendo estos ejemplos es fácil comprobar las unidades naturales de otras magnitudes así como sus factores de conversión:

magnitud	SI	SN	factor	equivalencia
masa	kg	GeV	c^{-2}	$1\ GeV \equiv 1{,}7827\ 10^{-27}\ kg$
longitud	m	GeV^{-1}	$\hbar\ c$	$1\ GeV^{-1} \equiv 1{,}9733\ 10^{-16}\ m$
tiempo	s	GeV^{-1}	$\hbar$	$1\ GeV^{-1} \equiv 6{,}5820\ 10^{-25}\ s$
velocidad	$m\ s^{-1}$	adimensional	c	$1 \equiv 2{,}9979\ 10^8\ m\ s^{-1}$
energía	$kg\ m^2\ s^{-2}$	GeV	1	$1\ Gev \equiv 1{,}6022\ 10^{-10}\ J$
momento lineal	$kg\ m\ s^{-1}$	GeV	c^{-1}	$1\ GeV \equiv 5{,}3444\ 10^{-19}\ kg\ m\ s^{-1}$
momento angular	$kg\ m^2\ s^{-1}$	adimensional	$\hbar$	$1 \equiv 1{,}0546\ 10^{-34}\ J\ s$
fuerza	$kg\ m\ s^{-2}$	GeV^2	$(\hbar\ c)^{-1}$	$1\ GeV^2 \equiv 8{,}1196\ 10^5\ N$
densidad de energía	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	GeV^4	$(\hbar\ c)^{-3}$	$1\ GeV^4 \equiv 2{,}0852\ 10^{37}\ J\ m^{-3}$
carga eléctrica	$C = A\ s$	adimensional	1	$1 \equiv= 5{,}2909\ 10^{-19}\ A\ s$

La unidad de carga se obtiene de la relación que tiene con las constantes universales tomadas como unidad en la constante de estructura fina:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,\hbar\,c} \tag{3}$$

$$e = \sqrt{4\,\pi\,\alpha} = \sqrt{4\,\pi\,0{,}0072974} = 0{,}30282 \tag{4}$$

como la constante de estructura fina es adimensional, la unidad natural de carga es adimensiional, su factor de equivalencia es 1 y su equivalencia es $1 \equiv 1{,}6022\ 10^{-19} (0{,}30282)^{-1} = 5{,}2909\ 10^{-19}\ A\ s$.

Las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein en unidades internacionales se reescriben:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = 8\,\pi\, G\, T_{\mu\nu} \tag{5}$$

las unidades en el SI del miembro de la izquierda son m^{-2} que en unidades naturales equivalen a GeV^2, las dimensiones de la constante de gravitación G son $[F][L]^2[M]^{-2}$ y si observamos la tabla le corresponde la unidad natural $GeV^2GeV^{-2}GeV^{-2} = GeV^{-2}$, como la unidad natural de la densidad de energía GeV^4 concluimos que el miembro de la derecha mantiene la consistencia con las unidades.

Unidades geometrizadas

También han sido utilizadas ampliamente en cosmología, se basan en tomar como unidad y adimensionales las constantes universales:

$$c = G = 1 \tag{6}$$

donde $G = 6{,}6743\,10^{-11}\,kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}$ y se selecciona la longitud como magnitud de referencia medida en su unidad del SI, es decir en metros. El resto de unidades tendrán como unidad una potencia de la longitud $m^{\alpha+\beta+\gamma}$ dependiente de sus unidades respectivas en SI $kg^{\alpha}m^{\beta}s^{\gamma}$. El factor de conversión es $G^{-\alpha}c^{2\alpha-\gamma}$.

¿Cual es la unidad geometrizada del tiempo y el factor de conversión al SI?

Sabemos que su unidad en el SI es el s que está relacionado con la longitud por la ecuación $c = l/t$. El segundo expresado en MKS se ajusta a $kg^0m^0s^1$ es decir $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 1$ y por tanto su unidad natural es la potencia de la longitud m^{0+0+1}, es decir el tiempo en unidades geometrizadas se expresa en m. Si queremos convertir un tiempo expresado en unidades naturales al SI, el factor de conversión será $G^{-0}c^{2\cdot 0-1} = c^{-1}$, esto significa que un tiempo de 1 m equivale a $3{,}3356\,10^{-9}$ s.

¿Cual es la unidad geometrizada de la masa y el factor de conversión al SI?

Sabemos que su unidad en el SI es el kg que está relacionado con la longitud por la ecuación $[G] = [M]{-}1[L]^3[T]^{-2}$. El kilogramo expresado en MKS se ajusta a $kg^1m^0s^0$ es decir $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ y por tanto su unidad natural es la potencia de la longitud m^{1+0+0}, es decir la masa en unidades geometrizadas se expresa en m. Si queremos convertir una masa expresada en unidades naturales al SI, el factor de conversión será $G^{-1}c^{2\cdot 1-0} = G^{-1}c^2$, esto significa que una masa de 1 m equivale a $1{,}3466\,10^{27}$ kg.

magnitud	SI	SN	factor	equivalencia
masa	kg	m	$G^{-1}c^2$	$1\,m \equiv 1{,}3466\,10^{-27}\ kg$
longitud	m	m	1	$1\,m \equiv 1\,m$
tiempo	s	m	c^{-1}	$1\,m \equiv 3{,}3356\,10^{-9}\,s$
velocidad	$m\,s^{-1}$	adimensional	c	$1 \equiv 2{,}9979\,10^8\ m\,s^{-1}$
energía	$kg\,m^2\,s^{-2}$	m	$G^{-1}c^4$	$1\,m \equiv 1{,}2102\,10^{-44}\,J$
momento lineal	$kg\,m\,s^{-1}$	m	$G^{-1}c^3$	$1\,m \equiv 4{,}0370\,10^{35}\,kg\,m\,s^{-1}$
momento angular	$kg\,m^2\,s^{-1}$	m^2	$G^{-1}c^3$	$1\,m^2 \equiv 4{,}037\,10^{35}\,kg\,m^2\,s^{-1}$
fuerza	$kg\,m\,s^{-2}$	adimensional	$G^{-1}c^4$	$1 \equiv 1{,}2102\,10^{44}\,kg\,m\,s^{-2}$
densidad de energía	$kg\,m^{-1}\,s^{-2}$	m^{-2}	$G^{-1}c^4$	$1\,m^{-2} \equiv 1{,}2102\,10^{44}\,kg\,m^{-1}\,s^{-2}$

De nuevo las ecuaciones de campo gravitatorio de Einstein toman la forma siguiente en unidades geometrizadas:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = 8\, \pi\, T_{\mu\nu} \tag{7}$$

donde las unidades geometrizadas del miembro de la izquierda siguen siendo las de las unidades SI m^{-2}, mientras que el de la derecha corresponde a las unidades geometrizadas de la densidad de energía que es también m^{-2}.

Como curiosidad la masa del Sol en unidades SI es $1{,}989\, 10^{30}\, kg$, usando la equivalencia inversa que viene indicada en la tabla $(G^{-1} c^2)^{-1}$,tenemos que en unidades geometrizadas su masa es de $1480\, m$.